

Введение в теорию решения задач с параметрами

Владимир Николаевич
Худенко

§1. Основные понятия

Определение 1.1. *Параметром* (от греческого παράμετρον - отмеряющий) называется величина, значение которой служат для различения элементов некоторого множества между собой.

Например, в декартовых координатах уравнение $y = x^2 + a$

задает множество парабол с вершинами на оси ОУ.

Определение 2.1. *Неизвестные величины, значения которых мы задаем сами, называются **параметром**.*

$$x^4 + x^3 - (1 + 2a)x^2 - (a + 1)x + a^2 + a = 0$$

В роли параметра лучше на первом этапе рассматривать x .

$$a^2 - (2x^2 + x - 1)a + x^4 + x^3 - x^2 - x = 0$$

Это уравнение рассматриваем, как квадратное относительно a .

$$\begin{aligned} D &= (2x^2 + x - 1)^2 - 4x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x = \\ &= 4x^4 + x^2 + 1 + 4x^3 - 4x^2 - 2x - 4x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x = \end{aligned}$$

$$= x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$
$$a = \frac{(2x^2 + x - 1) \pm (x + 1)}{2} \quad \begin{cases} a = x^2 - 1, \\ a = x^2 + x \end{cases}$$

Полученную совокупность решаем как
совокупность квадратных уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 1 - a = 0, \\ x^2 + x - a = 0. \end{cases}$$

Определение 3.1. *Областью определения уравнения с параметром $f(x, a) = 0$*

будем понимать все такие системы значений x и a , при которых уравнение имеет смысл.

Замечание. Если найти область уравнения технически сложно, будем ограничиваться системой неравенств.

$$\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \frac{a^2 - 1}{2a - x} = 1$$

Определение 4.1. Решить уравнение $f(x, a) = 0$ с параметром a – указать решение при всех возможных значениях параметра a или установить, что их нет.

Линейные уравнения и к ним приводимые (с ветвлениями)

1.3 Решить уравнение $2a(a-2)x = a-2$

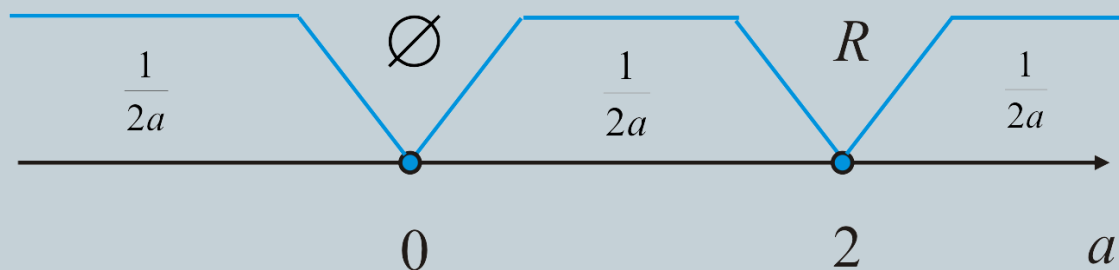
Определение 1.3. *«Контрольное» значение параметра* – такое значение параметра, при котором качественно меняются свойства уравнения.

Имеем два контрольных значения параметра:

При $a=0$ получаем $0 \cdot x = -2 \Rightarrow$ решения нет;

При $a=2$ получаем $0 \cdot x = 0 \Rightarrow x$ – любое;

При $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $2a \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2a}$



Ответ

1. Если $a=0$ решения нет;

2. Если $a=2$ $x \in R$;

3. Если $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $x = \frac{1}{2a}$;