Кредиты

Кредит - это финансовая сделка, по которой кредитор (как правило банк) предоставляет на определенный срок деньги заемщику.

За пользование деньгами заемщик, кроме возвращения основной суммы (называемой в финансовой литературе *телом кредита*), выплачивает кредитору проценты.

Рассматриваются два способа погашения кредита: ***дифференцированный*** (разными платежами, убывающими в арифметической прогрессии) и ***аннуитетный*** (равными платежами).

При *дифференцированной* схеме погашения кредита ежемесячный платеж включает в себя сумму для погашения основного долга, к которому добавляются проценты на **оставшуюся часть долга**

При этом регулярные платежи заёмщика оказываются различными. Методика расчёта платежей в данном случае основывается на использовании арифметической прогрессии.

За первый месяц процентный платеж начисляются на всю сумму долга, а в каждый последующий месяц на **остаток долга** (т.е. на величину долга с учетом выплаченной части)

Если величина кредита равна K, число одинаковых месячных выплат основного долга m, годовая процентная ставка p %, то платеж в первом месяце составит

$$x_1 = \frac{Kp}{1200}$$

Во втором месяце

$$x_2 = \left(K - \frac{K}{m} \right) \frac{p}{1200} = \frac{Kp}{1200} \left(1 - \frac{1}{m} \right) = x_1 \frac{m-1}{m}$$

В m – м месяце

$$x_m = \left(K - (m-1)\frac{K}{m} \right) \frac{p}{1200} = \frac{Kp}{1200} \left(1 - \frac{m-1}{m} \right) = x_1 \frac{1}{m}$$

Общая величина выплат:

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_m =$$

$$= \frac{Kp}{12000} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{m} \right) + \left(1 - \frac{2}{m} \right) + \left(1 - \frac{3}{m} \right) + ... + \frac{1}{m} \right]$$

Откуда

$$X = \frac{Kp}{1200}\frac{m}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$X = \frac{Kp}{2400}(m + 1)$$

Наибольшим спросом заемщиков пользуется *аннуитентная* схема, когда сумма ежегодного (ежеквартального, ежемесячного) платежа фиксируется на весь срок кредитования.

Пусть кредит в размере S рублей выдан на n лет под p % годовых и пусть x – ежегодный платеж по кредиту.

Тогда полная выплата по кредиту составит $X=nx$ рублей.

Найдем x и X при $n=2,3,4$.

Ежегодное начисление $p\%$ на остаток долга соответствует на умножение на коэффициент $q= 1+0{,}01p$

После первой выплаты сумма долга составит

$$S_1 = Sq - x,$$

после второй выплаты

$$S_2 = S_1 q - x = (Sq - x)q - x = Sq^2 - xq - x,$$

после третьей выплаты

$$S_3 = S_2 q - x = \left(Sq^2 - xq - x\right)q - x =$$

$$= Sq^3 - xq^2 - xq - x =$$

$$= Sq^3 - \left(q^2 + q + 1\right)x =$$

$$= Sq^3 - \frac{q^3 - 1}{q - 1}x$$

После четвертой выплаты

$$S_4 = S_3 q - x = Sq^4 - \left(q^3 + q^2 + q\right)x - x = Sq^4 - \left(q^3 + q^2 + q + 1\right)x =$$

$$= Sq^4 - \frac{q^4 - 1}{q - 1}x$$

Если n =2, т.е. если кредит выплачен за 2 года, то S_2=0

$$Sq^2 - x(q+1) = 0 \Rightarrow x = \frac{Sq^2}{1+q}$$

Полная выплата по кредиту составит

$$X = 2x = 2\frac{Sq^2}{1+q}$$

Если n =3, т.е. кредит выплачен за 3 года то S_3=0

$$Sq^3 - \frac{q^3-1}{q-1}x = 0 \Rightarrow x = \frac{Sq^3(q-1)}{q^3-1}$$

Полная выплата по кредиту

$$X = 3x = 3\frac{Sq^3(q-1)}{q^3-1}$$

Если n =4, т.е. кредит выплачен за 4 года то S_4=0

$$Sq^4 - \frac{q^4-1}{q-1}x = 0 \Rightarrow x = \frac{Sq^4(q-1)}{q^4-1}$$

Полная выплата по кредиту

$$X = 4x = 4\frac{Sq^4(q-1)}{q^4-1}$$

<ins>Замечание:</ins> При решении практических задач удобнее пользоваться не десятичными, а простыми дробями. Так если процентная ставка 25% то ей соответствует коэффициент

$$q = 1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}$$

Если процентная ставка 20% то ей соответствует коэффициент

$$q = 1 + \frac{20}{100} = \frac{6}{5}$$

Пример 1. Предприниматель обратился в банк с просьбой о предоставлении ссуды в размере 1000000 рублей сроком на 1 год.

Банк выдал ему эту сумму под 20% при условии погашения ссуды одним платежом.

Какую сумму заплатит предприниматель через год, сколько заработает банк?

Решение

Через год предприниматель должен вернуть банку

$$1000000 \cdot 1{,}2 = 1200\,000 \text{ рублей}$$

Банк получит

1200000-1000000 = 200 000 рублей

Пример 2. Клиент взял кредит в банке 18 000 на год под 14%

Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму долга (тело кредита и проценты).

Сколько рублей клиент должен платить ежемесячно?

Решение.

Клиент будет вносить ежемесячно

$$\frac{18000\cdot 1{,}14}{12}=\frac{18000\cdot 0{,}38}{4}=\frac{4500\cdot 0{,}38}{1}=45\cdot 38=1710$$

Ответ: 1710 рулей

Пример 3. 20 декабря Сергей Михайлович взял в банке 800 000 рублей в кредит.

План выплаты кредита такой: 20 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 2%), затем Сергей Михайлович переводит в банк платеж.

На какое минимальное количество месяцев Сергей Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 360 000 рублей

Решение.

Очевидно, что чем больше Сергей Михайлович будет выплачивать в месяц, тем быстрее он выплатит кредит. Поэтому тактика будет такова: на первые месяцы планируется выплаты ровно по 360 000 рублей, а в последний месяц может быть меньше

Спустя месяц после взятия кредита сумма долга

$$800\,000 \cdot 1{,}02 = 816\,000 \text{ рублей}$$

После первой выплаты

816 000 – 360 000 =456 000 рублей

Еще через месяц долг возрастает

456 000 · 1,02= 465 120 рублей

После выплаты за второй месяц

465 120 – 360 000 = 105 120 рублей

Через месяц долг возрастает до

105 120 · 1,02 = 107 222, 4 рублей,

которые Сергей Михайлович и погасит.

Следовательно минимальное количество месяцев, на которые Сергей Михайлович может взять кредит – 3

Ответ: 3 месяца

Пример 4. Клиент взял 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых.

По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа.

Какой должен быть этот ежегодный платеж, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Пусть искомый платеж x рублей. Тогда в конце первого года клиент должен

$1{,}3 \cdot 15\,960\,000 - x = 20\,748\,000 - x$ (рублей)

Аналогично в конце второго года

$1{,}3 \cdot (20\,748\,000 - x) - x = 26\,972\,400 - 2{,}3x$

Наконец в конце третьего года

$1{,}3 \cdot (26\,972\,400 - 2{,}3x) - x = 35\,064\,120 - 3{,}99x$ рублей

По условию задачи кредит выплачен за 3 года, следовательно, долг в конце этого года равен 0, получаем уравнение

$35\,064\,120 – 3{,}99x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8\,788\,000$

Ответ 8 788 000 рублей

Пример 5. Двадцать пятого ноября 2013 года Иван взял в банке 2 млн. рублей в кредит.

План выплаты кредита такой: 25 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся часть долга, т.е. увеличивает на $x\%$, а затем Иван производит очередную выплату.

Иван выплатил кредит за 2 выплаты, переведя 1 раз 1 210 000 рублей, а во второй 1 219 800 рублей. Под какой годовой процент банк выдал кредит?

- Решение.

После начисления процентов сумма, которую Иван должен выплатить составит

$$2000000\left(1+\frac{x}{100}\right)$$ рублей

Из них Иван выплачивает 1 210 000 рублей, уменьшая тем самым сумму долга до

$$2000000\left(1+\frac{x}{100}\right)-1210000$$

В конце второго года сумма долга составит

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(2000000\left(1+\frac{x}{100}\right)-1210000\right)$$

Заплатив 1 219 800, Иван погашает кредит

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(2000000\left(1+\frac{x}{100}\right)-1210000\right)=1219800$$

Замена $y=\left(1+\frac{x}{100}\right)$

Сократим обе части на 200 получим

$$y\cdot(10000y-6050)=6099 \qquad 10000y^2-6050y-6099=0$$

$$D=6050^2+4\cdot10000\cdot6099=50^2\left(121^2+4\cdot4\cdot6099\right)=$$

$$=50^2(14641+97585)=50^2\cdot112225=50^2\cdot5^2\cdot4489=50^2\cdot5^2\cdot67^2$$

$$y_{1,2}=\frac{6050\pm50\cdot5\cdot67}{2\cdot10000}=\frac{121\pm5\cdot67}{400}=\frac{121\pm335}{400}$$

Берем положительное значение

$$y = \frac{121+335}{400} = \frac{456}{400} = \frac{114}{100} = 1{,}14$$

Откуда x = 14%

Пример 6. Банк выдал заемщику кредит в размере 30 000 рублей. Ежегодная выплата по кредиту составляет 10 000 рублей (последний платеж может отличаться в меньшую сторону). Процентная ставка 20%. Через сколько лет кредит может быть погашен? Сколько составит переплата?

Сумма кредита	Ежегодная выплата	Проценты по кредиту (20%)	Погашение тела кредита	Тело кредита на начало след. года
30000	10000	6000	4000	26000
26000	10000	5200	4800	21200
21200	10000	4240	5760	15410
15410	10000	3088	6912	8528
8528	8528			0

Переплата составит 48 528 – 30 000 = 18 528

Ответ: 5 лет; 18 528 рублей

V. Khudenko

Пример 7. 15 января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг выражается в процентах от кредита

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Текущий долг	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 4%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине месяца начиная с февраля.

На сколько процентов общая сумма выплат больше суммы самого кредита?

Пусть S – сумма кредита, а x_1, x_2, ..., x_6 – выплаты в первой половине февраля, марта и т.д. Опишем погашение кредита на языке уравнений

На 15.02 $\quad 1{,}04\,S - x_1 = 0{,}9S$,

На 15.03 $\quad 1{,}04 \cdot 0{,}9S - x_2 = 0{,}8S$,

На 15.04 $\quad 1{,}04 \cdot 0{,}8S - x_3 = 0{,}7S$,

На 15.05 $\quad 1{,}04 \cdot 0{,}7S - x_4 = 0{,}6S$, На 15.06 $\quad 1{,}04 \cdot 0{,}6S - x_5 = 0{,}5S$

На 15.07 $\quad 1{,}04 \cdot 0{,}5S - x_6 = 0.$

Складываем уравнения

$$1{,}04S \cdot (1 + 0{,}9 + 0{,}8 + \ldots + 0{,}5) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_6) = S \cdot (0{,}9 + 0{,}8 + \ldots + 0{,}5)$$

Пусть $\quad X = x_1 + x_2 + \ldots + x_6$

- общая сумма выплат.

Подсчитаем сумму арифметической прогрессии $\quad 5 + 6 + + \ldots + 9 = \frac{5+9}{2} \cdot 5 = 35$

Получаем уравнение $\quad 1{,}04S \cdot 4{,}5 - X = S \cdot 3{,}5$

$$X = S(1{,}04 \cdot 4{,}5 - 3{,}5) = 1{,}18S$$

Таким образом, общая сумма выплат на 18% больше суммы самого кредита.

Ответ: 18.

Пример 8. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия возврата таковы:

- Каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- С февраля по июнь необходимо погасить часть долга;

- В июле каждого года долг должен быть на одну и туже сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 18 млн рублей?

Пусть планируется взять кредит на n лет. Долг перед банком постоянно уменьшается равномерно до нуля

$$10,\ \frac{10(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{10\cdot 2}{n},\ \frac{10}{n},\ 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 20%, значит последовательность размеров долга в январе такова

$$12,\ \frac{12(n-1)}{n},\ldots,\frac{12\cdot 2}{n},\frac{12}{n},0$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$2+\frac{10}{n},\frac{2(n-1)+10}{n},\ldots,\frac{4+10}{n},\frac{2+10}{n}$$

Всего следует выплатить

$$10+2\left(\frac{n+(n-1)+\ldots+2+1}{n}\right)=10+2\cdot\frac{n+1}{2}=n+11$$

Общая сумма выплат 18 млн рублей, поэтому $n=7$

Ответ: 7

Пример 9. 15 января планируется взять кредит в банке на два года. Условия возврата таковы:

- 1 –го числа последующего месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- Со 2-го по 14 – е число месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15 – го числа каждого месяца, последующего за месяцем получения кредита, долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15 число, предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. Найдите *r*.

Пусть К сумма кредита, тогда согласно условию она будет уменьшаться на одно и тоже число равное $\dfrac{K}{24}$

$$K, \frac{23}{24}K, \frac{22}{24}K, \ldots, \frac{2}{24}K, \frac{1}{24}K, 0$$

Выплаты по кредиту со 2 по 14 число составят

$$K \cdot \frac{r}{100} + \frac{K}{24}, \frac{23}{24}K \cdot \frac{r}{100} + \frac{K}{24}, \frac{22}{24}K \cdot \frac{r}{100} + \frac{K}{24}, \ldots,$$

$$\frac{2}{24}K\frac{r}{100} + \frac{K}{24}, \frac{1}{24}K\frac{r}{100} + \frac{K}{24}$$

- Сумма всех выплат

$$K+\frac{K}{24}\cdot\frac{r}{100}\left(24+23+22+...+1\right)=$$

$$K\left(1+\frac{1}{24}\cdot\frac{3}{100}\cdot\frac{24+1}{2}\cdot 24\right)=K\left(1+\frac{r}{8}\right)$$

Согласно условию, составляем пропорцию

К	100%
$K\left(1+\frac{r}{8}\right)$	125%

$$K\left(1+\frac{r}{8}\right)\cdot 100\%=K\cdot 125\% \qquad \left(1+\frac{r}{8}\right)=\frac{5}{4}\Leftrightarrow r=2.$$

Ответ:2

Пример 10. 1 июля не високосного года Екатерина взяла в банке кредит на сумму 109500 рублей под 24% годовых сроком на 6 месяцев на условиях погашения кредита дифференцированными платежами.

Это означает, что 1 числа каждого месяца следующего за июлем она вносит в банк платеж, состоящий $\frac{1}{6}$ части долга (т.е. 18 250 рублей) и процентов, которые начисляются с учетом числа дней в предыдущем месяце.

30 или 31 день (всего 6 платежей). Найдите сумму всех выплат по кредиту.

Решение.

Сумма процентов за июль составит

$$\delta_1 = 109500 \cdot 0{,}24 \cdot \frac{31}{365} = 2232$$

Сумма процентов за август

$$\delta_2 = (109500 - 18500) \cdot 0{,}24 \cdot \frac{31}{365} = 1860$$

Сумма процентов за сентябрь

$$\delta_3 = (109500 - 18500 \cdot 2) \cdot 0{,}24 \cdot \frac{30}{365} = 1440$$

Сумма процентов за октябрь

$$\delta_4 = (109500 - 18500 \cdot 3) \cdot 0{,}24 \cdot \frac{31}{365} = 1116$$

Сумма процентов за ноябрь

$$\delta_5 = (109500 - 18500 \cdot 4) \cdot 0{,}24 \cdot \frac{30}{365} = 720$$

Сумма процентов за декабрь

$$\delta_6 = (109500 - 18500 \cdot 5) \cdot 0{,}24 \cdot \frac{31}{365} = 372$$

Сумма всех выплат в рублях по процентам

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_6 =$$

$$= 2232 + 1860 + 1440 + 1116 + 720 + 372 = 117240$$

Ответ: 117 240