Вклады

Вкладом называется денежная сумма или другие ценности, которые человек отдаёт в банк на определённых условиях, подразумевающих наличие процентов за определённый период на вложенную сумму

Например, если вложена сумма A под p% на период времени t , то по истечении этого времени вложенная сумма увеличится на

$$A + A \cdot \frac{p}{100} = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

V. Khudenko

Если при каждом начислении проценты меняются и составляют соответственно p_1, p_2 *и* т.д. то

$$S_n = A\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1+\frac{p_n}{100}\right)$$

Обычно в предложениях речь идет о процентах годовых.

Если проценты начисляются раз в год, то проблем нет и вычисления производятся по формулам приведённым выше.

В некоторых случаях речь идет о вкладах с пролангацией (продлением) через определенные промежутки времени (1, 3, 6 месяцев). Формулы меняются.

При однократном начислении процентов через m дней на вклад A_0 под p% годовых

$$S_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\frac{m}{365}\right)$$

В обычный год и

$$S_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\frac{m}{366}\right)$$

Для високосного года.

V. Khudenko

Пример 1. В не високосном году клиент открыл в банке 1 сентября на месяц под 12% годовых. Сколько рублей окажется на счёте вклада 1 октября, если сумма вклада равна 100000 рублей.

Воспользуемся формулой

$$S_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\frac{m}{365}\right)$$

где A_0=100000, *p=12, m=30* (в сентябре 30 дней)

$$S_n = A_0\left(1+0,12\cdot\frac{30}{365}\right).$$

Число в скобках с точностью 7 знаков после запятой 1,0098630. Сумма 100986 руб 30 коп

Если проценты на депозит начисляются несколько раз через равные промежутки времени и каждый раз зачисляются на вклад , сумма вклада по истечении n таких промежутков будет равна

$$S_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\frac{m}{365}\right)^n$$

На практике банки варьируют величину m в зависимости от месяца 28, 29, 30 или 31 день.

Для приближенных расчетов может использоваться упрощенная модель

V. Khudenko

В соответствии с которой один месяц считается равным $\frac{1}{12}$ части года.

Тогда если речь идет о вкладе на 3 месяца под *r%* годовых, с последующей пролонгацией,

то каждые 3 месяца сумма на вкладе будет увеличиваться на $\frac{r}{4}$% (так как 3 месяца – это четверть года).

После *n* – й пролонгации сумма на вкладе составит

$$S_n = A_0\left(1+\frac{r}{400}\right)^n$$

V. Khudenko

Аналогично при пролонгации каждые пол года

После n – й пролонгации сумма на вкладе составит

$$S_n = A_0\left(1+\frac{r}{200}\right)^n$$

Вычисленные суммы также округляются, так что бы вычислить искомую сумму до копеек.

Пример: Какой вклад выгоднее: Первый под 13% годовых, или второй – на 3 месяца с автоматической пролонгацией под 12% ?

При расчетах будем принимать месяц $\frac{1}{12}$ года.

Пусть S_0 – сумма вклада. Тогда по условиям 1 депозита, на счету будет $1{,}13S_0$

По условиям второго $(1{,}03)^4\, S_0=1{,}12550881$ т.е. прибавка составит 12,5%. Значит первый вклад - выгоднее

Вклады на ставку с капитализацией процентов

Задача 1. *Ольга Викторовна* поместила 250 000 рублей в банк на 3 месяца, под 24% годовых с учётом капитализации процентов. Какова будет сумма на счёте через 3 месяца?

Решение

$$250000\left(1+\frac{24}{12\cdot 100}\right)^3 = 250000\cdot 1{,}02^3 = 265302$$

Разница 15 302 рубля

V. Khudenko

Задача 2. Семён Петрович положил 8000 рублей в сберегательный банк.

По истечении года к вкладу были добавлены деньги, начисленные по процентам, и, помимо этого Семён Петрович, увеличил вклад на 1360 рублей.

Еще через год, он снял 1440 рублей, а остальные 9360 рублей оставил в банке.

Чему равна процентная ставка?

Пусть процентная ставка p% тогда через год на счёте оказалось

$$8000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

После увеличения

$$8000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)+1360$$

Ещё через год

$$\left(8000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)+1360\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

По условиям задачи получаем

$$\left(8000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)+1360\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)-1440=9360$$

$$8000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+1360\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-10800=0$$

Обозначаем $\left(1+\frac{p}{100}\right)=x$

$$8000\cdot x^2+1360\cdot x-10800=0$$

$$100\cdot x^2+17\cdot x-135=0$$

$$x=\frac{-17\pm 235}{200}$$

$$x=\frac{216}{200}=\frac{108}{100}=1+\frac{8}{100}$$

Ответ 8%.

V. Khudenko

Задача 3.

Вкладчик внёс в банк 500 000 рублей по 20% годовых.

В конце каждого года в течение в течении 3 лет после начисления процентов, он дополнительно вносил одну и ту же сумму.

К концу четвёртого его вклад стал равным 1 364 400 руб.

Какую сумму в рублях дополнительно вносил вкладчик в конце каждого года?

Обозначим сумму в рублях, которую дополнительно вносил вкладчик x. Составим таблицу

N п.п	Период	Сумма на счете
1	В конце 1 года	$500000\cdot 1{,}2+x$
2	В конце 2 года	$(500000\cdot 1{,}2+x)\cdot 1{,}2+x$
3	В конце 3 года	$((500000\cdot 1{,}2+x)\cdot 1{,}2+x)\cdot 1{,}2+x$
4	В конце 4 года	$(((500000\cdot 1{,}2+x)\cdot 1{,}2+x)\cdot 1{,}2+x)1{,}2$

По условию задачи получаем уравнение

$$\left(\left(\left(500000\cdot 1{,}2+x\right)\cdot 1{,}2+x\right)\cdot 1{,}2+x\right)1{,}2=1363400$$

$$500000\cdot 1{,}2^{4}+\left(\left(1{,}2\cdot x+x\right)\cdot 1{,}2+x\right)\cdot 1{,}2=1364400$$

Так как $1{,}2^4 = 2{,}0736$ и $\left(\left(1{,}2\cdot x+x\right)\cdot 1{,}2+x\right)\cdot 1{,}2=4{,}368x$

Получаем уравнение

$$500000\cdot 2{,}0736+4{,}368x=1364400$$

$$4{,}368x=327600 \qquad x=75000$$

Задача 4.

Вкладчик внес в банк некоторую сумму. Укажите такое наименьшее целое значение *r*, чтобы при ставке *r*% годовых через 4 года сумма вклада стала больше,

чем сумма первоначального вклада, увеличенная в 4 раза.

Решение. Пусть *К* – сумма вклада, тогда по формуле сложных процентов при ставке *r*% годовых сумма будет составлять $K \cdot q^4$

$$q = 1 + \frac{r}{100}$$

Из условия получаем неравенство

$$K \cdot q^4 > 4K \Leftrightarrow q^4 > 4$$

$$q^4 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left(q^2 - 2\right)\left(q^2 + 2\right) > 0$$

Так как , всегда, получаем требование

$$\left(q^2 - 2\right) > 0 \Leftrightarrow \left(q - \sqrt{2}\right)\left(q + \sqrt{2}\right) > 0 \Leftrightarrow q > \sqrt{2}$$

$$q > \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{r}{100} > \sqrt{2} \Leftrightarrow r > 100\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Оценим $100\left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{20000} - 100$, так как 141^2=19 881, а 142^2 = 20164 $41 < \sqrt{20000} - 100 < 42$

Тогда наименьшее, целым значением *r, будет* 42

V. Khudenko

Задача 5. В 2012 году Иван Терентьевич открыл вклад в банке под 15% годовых.

Каждый год, начиная 2013 года1 июня Иван Терентьевич добавлял к своему вкладу сумму, равную первоначальному взносу в 2012 году.

Какова сумма ежегодного вклада, если в конце дня 31 мая 2015 года на его счету оказалось 63 894 рубля?

Обозначим сумму x. Тогда в конце мая 2015 года с учетом начисления процентов, имеем (раскрываем постепенно)

V. Khudenko

N п.п.	Период	Сумма
1	2013 год	$x\left(1+\frac{15}{100}\right)+x$
2	2014	$\left(x\left(1+\frac{15}{100}\right)+x\right)\left(1+\frac{15}{100}\right)+x$
3	2015	(*) $\left(\left(x\left(1+\frac{15}{100}\right)+x\right)\left(1+\frac{15}{100}\right)+x\right)\left(1+\frac{15}{100}\right)$

V. Khudenko

Учитываем, что $\left(1+\frac{15}{100}\right)=\frac{115}{100}=\frac{23}{20}$

Преобразовываем выражение (*)

$$x\left(\frac{23}{20}\right)^3+x\left(\frac{23}{20}\right)^2+x\left(\frac{23}{20}\right)=x\left(\left(\frac{23}{20}\right)^3+\left(\frac{23}{20}\right)^2+\left(\frac{23}{20}\right)\right)=x\frac{31947}{20^3}$$

Исходя из условия, получаем

$$x\frac{31947}{20^3}=63894 \qquad x=\frac{63894\cdot 20^3}{31947}=2\cdot 20^3=16000$$

V. Khudenko

Задача 6. Лидия положила некоторую сумму на счет в банке на пол года. По этому вкладу установлен «плавающий процент», то есть число начисленных процентов зависит от числа полных месяцев, которые вклад пролежал на счёте

В таблице представлены условия начисления процентов

Срок вклада	1-2 месяца	3-4 месяца	5-6 месяцев
Ставка в % годовых	6%	18%	12%

V. Khudenko

Начисленные проценты добавляют к сумме вклада. В конце каждого месяца, за исключением последнего, Лидия после начисления процентов добавляет такую сумму, чтобы вклад ежемесячно увеличивался на 10% от первоначального.

Какой процент от суммы вклада составляет сумма, начисленная в качестве процентов?

Пересчитаем таблицу в % в месяц, учитывая

$$\frac{6\%}{12}=0{,}5\% \qquad \frac{18\%}{12}=1{,}5\% \qquad \frac{12\%}{12}=1\%$$

Срок вклада	1 мес.	2 мес.	3 мес.	4 мес.	5 мес.	6 мес.
Ставка % в месяц	0,5%	0,5%	1,5%	1,5%	1%	1%

Месяц	Количество процентов	Итог
Первый месяц	На 100% увеличивает на 0,5 %	$100\% \cdot 0{,}005 = 0{,}5\%$
Второй месяц	На 110% начисляет 0,5%	$110\% \cdot 0{,}005 = 0{,}55\%$
Третий месяц	На 120% начисляет 1,5%	$120\% \cdot 0{,}015 = 1{,}8\%$
Четвертый месяц	На 130% начисляет 1,5%	$130\% \cdot 0{,}015 = 1{,}95\%$
Пятый месяц	На 140% начисляет 1%	$140\% \cdot 0{,}01 = 1{,}4\%$
Шестой месяц	На 150% начисляет 1%	$150\% \cdot 0{,}01 = 1{,}5\%$
	Итого	7,7%

V. Khudenko

Задача 7. Первый банк предлагает открыть вклад с процентной ставкой в 8%, второй 10%.

Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Клиент сделал одинаковые вклады в оба банка.

Через два года второй банк уменьшил процентную ставку по вкладу с 10 до P процентов. Еще через год клиент закрыл оба вклада и забрал все накопившиеся средства.

Оказалось, что второй банк принес ему больший доход, чем первый. Найдите наименьшее P, при котором это возможно

Пусть в каждом банке клиент открыл вклад X рублей. Тогда в первом банке будет через три года на счёте рублей, $(1{,}08)^3 X$

а на счете во втором банке $(1{,}1)^2 \cdot \left(1+\dfrac{P}{100}\right)X$

По условию второй банк принес больший доход

$$(1{,}08)^3 X < (1{,}1)^2 \cdot \left(1+\frac{P}{100}\right)X \qquad \frac{(1{,}08)^3}{(1{,}1)^2} < 1+\frac{P}{100} \qquad 1{,}041\ldots < 1+\frac{P}{100}$$

$P > 4{,}1$

Наименьшее целое число 5.

Ответ 5.

V. Khudenko

Задача 8

Банк предлагает два вида вкладов – «Стабильный» и «Прогрессивный». Вклад «Стабильный» имеет процентную ставку 10% годовых, Вклад «Прогрессивный» - 6% за первый год и *p*% начиная со второго года.

Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Найдите наименьшее целое *p*, при котором трехлетний клад «Прогрессивный» окажется выгоднее, чем «Стабильный».

V. Khudenko

Решение.

Подсчитаем сумму на каждом вкладе через 3 года, если вложить сумму S на каждый из них.

Вклад «Стабильный» - 10%, тогда через 3 года $(1{,}1)^3 S$

Влад «Прогрессивный» через год $(1{,}06)\cdot S$

и еще через два года

$$(1{,}06)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 S$$

V. Khudenko

Вклад «Прогрессивный» выгоднее, когда

$$(1{,}06)\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 S > (1{,}1)^3 S$$

$$(1{,}06)\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 > (1{,}1)^3 \qquad \left(1+\frac{p}{100}\right)^2 > \frac{1{,}331}{1{,}06}$$

Умножаем обе части неравенства на 100^2

$$(100+p)^2 > \frac{13310}{1{,}06} \qquad 100+p > \sqrt{12556{,}6}$$

Подбором получаем $112 < \sqrt{12556{,}6} < 113$

$$100+p \geq 113 \qquad p \geq 13$$

V. Khudenko

Задача 9.

Вкладчик положил две одинаковые суммы под $r\%$ годовых в банки А и Б .

Через год в банке А условия изменились , и они понизили ставки до 10%, в то время как банк Б оставил ставку на том же уровне.

Найдите при каком наименьшем целом r вклад в банке Б через 3 года по крайней мере на 20% будет больше, чем в банке А.

Решение.

Пусть в каждый банк положили сумму S.

Через год в каждом банке сумма $S\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)$

Обозначим $q=1+\frac{r}{100}$

Через 3 года в банке А сумма $S_3(A)=S\cdot q\cdot(1{,}1)^2$

Через 3 года в банке Б сумма $S_3(Б)=S\cdot q^3$

$$S_3(Б)\geq S_3(A)\cdot 1{,}2 \qquad S\cdot q^3\geq S\cdot q\cdot(1{,}1)^2\cdot 1{,}2$$

$$q^2\geq 1{,}21\cdot 1{,}2 \qquad q\geq 1{,}21$$

$$1+\frac{r}{100}\geq 1{,}21 \Leftrightarrow r\geq 21$$

V. Khudenko

Задача 10

Клиент сделал вклад в банке размером в 200 000 рублей со ставкой 10% годовых. Проценты по вкладу начисляются один раз в год и прибавляются к текущему вкладу.

Клиент хочет в начале 3 и 4 года пополнить вклад на одно и то же целое число тысяч рублей (назовем это «довклад») так, что бы к концу 4 года по вкладу было начислено не менее 100 тысяч рублей.

При каком наименьшем размере довклада это возможно?

Решение. Обозначим x размер довклада

Изначальный вклад к концу четвертого года будет равен $200\cdot(1,1)^4$ тысяч рублей

Довклад, сделанный в начале 3 года, вырастет до $x\cdot(1,1)^2$ тысяч рублей;

Итого на счете будет $200\cdot(1,1)^4 + x\cdot(1,1)^2 + x\cdot 1,1$ тысяч рублей

Начисления $200\cdot(1,1)^4 + x\cdot(1,1)^2 + x\cdot 1,1 - (200 + x + x)$ тысяч рублей

Начисления не меньше 100 тысяч рублей, приходим к неравенству

$$200\cdot(1{,}1)^4 + x\cdot(1{,}1)^2 + x\cdot 1{,}1 - (200+2x) \ge 100$$

$$0{,}31x + 92{,}82 \ge 100 \qquad 0{,}31x \ge 7{,}18 \qquad x \ge 23{,}1\ldots$$

Наименьше целое число 24

Ответ 24 тысячи рублей

Задача 11.

Вклад планируется открыть на 4 года. Первоначально вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10%, а кроме того, в начале третьего и четвертого вклад пополнялся на 3 млн рублей.

Найдите наименьший размер первоначального клада, при котором банк за 4 года начислит на вклад более 6 млн рублей.

Решение

Пусть первоначальный клад равен S (млн. рублей). В конце первого года он стал равен

$$\left(1+\frac{10}{100}\right)S = 1{,}1\cdot S$$

В конце второго года $1{,}21\cdot S$

В конце третьего года $\left(1{,}21\cdot S+3\right)\cdot 1{,}1$

В конце четвёртого года $(1{,}331S+6{,}3)\cdot 1{,}1 = 1{,}4641S+6{,}93$

Вычисляем начисленную сумму

$$1{,}4641S+6{,}93-S-6 = 0{,}4641\cdot S+0{,}93$$

V. Khudenko

По условию задачи

$$0{,}4641 \cdot S + 0{,}93 > 6 \qquad 0{,}4641 \cdot S > 5{,}07$$

$$S > \frac{5{,}07}{0{,}4641} \qquad S > 10\frac{110}{119}$$

Наименьшее целое число 11

Ответ: 11

Задача 12

Вкладчик разместил в банке 32 тысячи рублей, несколько лет он получал то 5%, то 10% годовых, а за последний год 25% годовых.

При этом, каждый год проценты дополняли вклад.

В результате вклад стал равен 53361 руб. Сколько лет пролежал вклад.

Решение.

Пусть вклад пролежал *k* лет под 10% годовых и *n* лет под 5% годовых. Тогда за весь срок (*k* +*n*+*1*) лет начислено

$$32000\cdot(1{,}1)^k(1{,}05)^n\cdot 1{,}25$$

Получаем уравнение

$$32000\cdot(1{,}1)^k(1{,}05)^n\cdot 1{,}25=53361 \qquad 40000\cdot(1{,}1)^k(1{,}05)^n=53361$$

Домножим уравнение на 10^k и 100^n

$$40000\cdot(11)^k(105)^n=53361\cdot 10^k\cdot 100^n$$

$$40000\cdot 11^k\cdot 7^n\cdot 15^n=53361\cdot 10^k\cdot 100^n$$

V. Khudenko

Слева и справа находятся натуральные числа, левая часть делится на 7 и правая часть должна делиться на 7.

Причем, в правой части семерка присутствует столько раз, сколько и в левой. Последовательно делим 5361 на 7, получаем что

$$53361 = 7^2 \cdot 1098$$

Следовательно n =2. Сокращаем левую и правую части уравнения на 49, получаем

$$40000\cdot 11^{k}\cdot 15^{2}=1089\cdot 10^{k}\cdot 100^{2}$$

После сокращения

$$40000\cdot 11^{k}\cdot 15^{2}=1089\cdot 10^{k}\cdot 100^{2}$$

$$4\cdot 11^{k}\cdot 15^{2}=1089\cdot 10^{k}$$

Сократим обе части уравнения на 9

$$100\cdot 11^{k}=121\cdot 10^{k} \qquad \left(\frac{11}{10}\right)^{k}=\left(\frac{11}{10}\right)^{2}$$

Тогда k=2, а общее время $k+n+1=5$.

Ответ: 5 лет

V. Khudenko