

ПРОЦЕНТЫ

Процент от числа это $\frac{1}{100}$ часть этого числа. Обозначается %

При решении задач на проценты часто переходят к долям числа и относительным коэффициентам

Если величина B составляет $x\%$ от A , то

$$B = \frac{x}{100} A$$

Если величина C увеличилась на $x\%$, то она стала равняться

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) C$$

Если величина C уменьшилась на $x\%$, то она стала равняться

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)C$$

*Если некоторая величина по условию задачи изменяется неоднократно, с течением времени,
то проценты всякий раз берутся от последнего (текущего) значения (если не оговорено другое).*

Простые проценты

В этом случае проценты начисляются на первоначальную сумму A_0 вне зависимости от срока хранения вклада.

Пусть $x\%$ начисляются в конце каждого периода по правилу простых процентов (в зависимости от условия задачи это может быть год, квартал, месяц и т.д.)

Тогда через m периодов величина средств, лежащих на счету вкладчика, будет равной

$$A_m = \left(1 + m \cdot \frac{x}{100}\right) A_0$$

Сложные проценты

В этом случае проценты начисляются на всю имеющуюся на вкладе сумму (с учетом процентов, которые были начислены ранее).

Пусть первоначальный вклад A_0 и $x\%$ начисляются в конце каждого периода по правилу сложных процентов (в зависимости от условия задачи это может быть год, квартал, месяц и т.д.)

Тогда через t периодов величина средств, лежащих на счету вкладчика, будет равной

Сложные проценты

Исходная величина A начисляется p %

$$\text{Значение за 1 год} \quad A + A \frac{p}{100} = A \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

$$\text{Значение за 2 года} \quad A \left(1 + \frac{p}{100} \right) + A \left(1 + \frac{p}{100} \right) \frac{p}{100} =$$

$$= A \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 + \frac{p}{100} \right) = A \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

.....

$$\text{Значение за } t \text{ лет} \quad A \left(1 + \frac{p}{100} \right)^m$$

$$A_m = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^m A_0$$

Если некоторая численная величина делится на две части в пропорции $m:n$ (например, количество товара первого и второго сорта), то первая часть равна $\frac{mA}{m+n}$

а вторая часть равна $\frac{nA}{m+n}$

Аналогично, если некоторая численная величина делится на три части в пропорции $k:m:n$, то первая часть равна $\frac{kA}{k+m+n}$

вторая $\frac{mA}{k+m+n}$ третья $\frac{nA}{k+m+n}$

Пример 1. Магазин увеличил цену товара в 8 раз, однако по результатам проверки антимонопольным комитетом служба выписала предписание вернуть старую цену. На сколько процентов придется снизить цену?

Решение

Пусть первоначально товар стоил, x рублей. После подорожания он стал стоить $8x$ рублей. По результатам проверки цена снизилась на $7x$ рублей, что составляет

$$\frac{7x}{8x} \cdot 100\% = 87,5\%$$

От суммы $8x$. Ответ: $87,5\%$

Пример 2. В начале мая цена на помидоры повысилась на 20% , а в начале июня понизилась на 20% , На сколько процентов цена помидоров стала ниже, чем цена до повышения?

Пусть, x – первоначальная цена килограмма помидоров в начале мая, до повышения.
После повышения цена стала

$$x \cdot 1,2$$

После понижения цены стала

$$x \cdot 1,2 \cdot 0,8 = x \cdot 0,96$$

Так как 0,96 составляет 96% от первоначальных 100%, то снижение в конечном итоге произошло на 4 %

Ответ: 4%.

Пример 3. Цена на автомобиль престижной марки ежегодно увеличивалась на одно и то же число процентов по сравнению с предыдущим годом.

На сколько процентов за каждый год увеличивается цена автомобиля, если выставленный на продажу за 2 560 000 рублей, он через 2 года был продан за 4 000 000 рублей.

Пусть процент увеличения $p\%$. Тогда цена через два года составит

$$2560000 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 4000000 \quad 2,56 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 4$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{4}{2,56} = \left(\frac{2}{1,6}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$1 + \frac{p}{100} = \frac{5}{4} \quad 1 + \frac{p}{100} = \frac{125}{100}$$

$$1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{25}{100}$$

Ответ: $p=25$

Пример 4. Накануне нового года некий предприниматель заказал из Бразилии 12 тонн ананасов.

В Бразилии к отправке подготовили 12 тонн при этом определено, что процентное содержание жидкости в товаре составляет 98%.

При разгрузке предприниматель выяснил, что доля жидкости уменьшилась до 94% за счёт усушки при транспортировке.

Сколько тонн ананасов он разгрузил?

Будем считать ананас состоит из жидкости и сухого остатка, масса которого не меняется при транспортировке

Изначально масса сухого остатка составляла $100\% - 98\% = 2\%$ т.е.

$$0,02 \cdot 12 = 0,24 \text{ ТОННЫ}$$

Теперь решим пропорцию

$$6\% \text{ ----- } 0,24 \text{ ТОННЫ}$$

$$100\% \text{ ----- } x \text{ ТОНН}$$

Следовательно $x = \frac{100 \cdot 0,24}{6} = 4$

Пример 5. Средняя заработная плата кабинетных работников на предприятии составляет 32 000 рублей.

При этом средняя заработная плата остальных сотрудников 28 000 рублей.

Определите сколько процентов сотрудников предприятия являются кабинетными работниками, если средняя заработная плата составляет 29200 рублей.

Пусть на предприятии n кабинетных работников, а остальных – m . Тогда по правилу вычисления среднего арифметического

$$\frac{32000n + 28000m}{m + n} = 29200$$

Выразим m через n .

$$32000n + 28000m = 29200(m + n)$$

Откуда

$$m = \frac{7}{3}n$$

Искомый процент

$$\frac{n}{n + m} \cdot 100\% = \frac{n}{n + \frac{7}{3}n} \cdot 100\% = \frac{1}{\frac{10}{3}} \cdot 100\% = 30\%$$

Пример 6.

С продовольственной базы в будние дня ежедневно отправляют в торговые точки 5000 плавленых сырков (равное количество в каждую торговую точку)

По воскресеньям 4 торговые точки не работают, зато в остальных точках продажи возрастают и с базы в сумме отправляют работающие торговые точки на 20% сырков больше, распределяя их поровну.

При этом в каждую торговую точку отправляют на 125 сырков больше, чем в будние дни. Сколько сырков отправляют в каждый задействованный магазин по воскресеньям?

Пусть в будние дни работает n торговых точек. Тогда в каждый будний день отправляют $\frac{5000}{n}$ сырков.

В выходные дни работает $n-4$ торговые точки, а сырков отправляют на 20% больше, т.е.

$$1,2 \cdot 5000 = 6000$$

В каждую торговую точку попадает , что по условию на 125 сырков больше. Составляем уравнение

$$\frac{6000}{n-4} - \frac{5000}{n} = 125, \quad n > 4$$

$$\frac{48}{n-4} - \frac{40}{n} = 1, \quad n > 4$$

Получаем квадратное уравнение

$$n^2 - 12n - 160 = 0 \quad \frac{D}{4} = 36 + 160 = 196$$

$$n_{1,2} = 6 \pm 14$$

$$n_1 = -8, \quad n_2 = 20$$

Итак, в будни работают 20 магазинов, в воскресенье 16. В каждый попадает

$$\frac{6000}{16} = 375 \quad \text{сырков}$$

Ответ: 375 сырков

Пример 7. Семья состоит из мужа, жены и сына-студента.

Если зарплата мужа увеличится вдвое, то общий доход семьи увеличится на 50%.

Если стипендия сына уменьшится в 2 раза, то общий доход семьи снизится на 10%.

Сколько процентов от общего дохода составляет зарплата жены?

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 – зарплата мужа, жены, сына. Тогда из условия задачи

получаем
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1,5(x_1 + x_2 + x_3), \\ x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} = 0,9(x_1 + x_2 + x_3) \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем

$$x_1 + (x_1 + x_2 + x_3) = 1,5(x_1 + x_2 + x_3)$$

Тогда

$$x_1 = 0,5(x_1 + x_2 + x_3) \quad (*)$$

Из второго уравнения получаем

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1,8(x_1 + x_2 + x_3)$$

Разбиваем первых два слагаемых,
получаем $x_1 + x_2 + (x_1 + x_2 + x_3) = 1,8(x_1 + x_2 + x_3)$

$$x_1 + x_2 = 0,8(x_1 + x_2 + x_3)$$

Подставим из (*) значение x_1

$$x_2 + 0,5(x_1 + x_2 + x_3) = 0,8(x_1 + x_2 + x_3)$$

Откуда $x_2 = 0,3(x_1 + x_2 + x_3)$

Т.е. зарплата жены составляет 0,3 от общего дохода, другими словами, 30%

Ответ: 30%.

Пример 8. Акционерное общество «Рога и копыта» израсходовало 40% своей годовой прибыли на реконструкцию производственной базы, 15%

из оставшихся денег на премирование персонала, 1 800 000 рублей выплатило в качестве дивидендов.

После всех этих расходов 21% прибыли остался нераспределёнными.

Сколько рублей составляла прибыль АО «Рога и копыта»?

Решение. Пусть прибыль составляет x рублей

Тогда $0,4x$ на реконструкцию.

После этого осталось $0,6x$ рублей и 15 процентов т.е

$$0,15 \cdot 0,6 \cdot x = 0,09x$$

После выплаты дивидендов осталось $0,21x$

Получаем уравнение $x - 0,09x - 0,4x - 1800000 = 0,21x$

$$0,3x = 1800000 \quad x = 6000000$$

Ответ: 6 000 000 рублей

Пример 9. Производительность труда на предприятии В больше чем на предприятии А на p %.

На сколько процентов производительность труда на предприятии А ниже ,чем на предприятии В?

В ответе укажите количество процентов

Решение.

Пусть α и β производительность труда на предприятиях A и B соответственно. По условию задачи

$$\beta = \alpha \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

Пусть производительность на предприятии A меньше на x %

$$\alpha = \beta \left(1 - \frac{x}{100} \right)$$

Подставляем значение β из первого соотношения

$$\alpha = \alpha \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 - \frac{x}{100} \right)$$

Выражаем x

$$1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$$

$$\frac{x}{100} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$$

$$x = 100 - \frac{100}{1 + \frac{p}{100}} = 100 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}\right)$$

$$x = 100 \left(1 - \frac{100}{100 + p}\right) = 100 \frac{100 + p - 100}{100 + p}$$

$$x = \frac{100 \cdot p}{100 + p}$$

Ответ: $\frac{100 \cdot p}{100 + p}$

Пример 10. Руководитель компании А решил распределить премиальный фонд за январь между тремя сотрудниками в соотношении 8:5:4,

но в итоге распределил тот же фонд в соотношении 7:7:6 между теми же сотрудниками. В результате третий сотрудник получил на 22000 рублей больше, чем получил бы на первоначальных условиях.

Определить величину премиального фонда (в рублях).

Пусть премиальный фонд x рублей

Всего первоначально 17 частей и третий работник получил бы $\frac{4}{17}x$ рублей

При реальном распределении 20 частей и третий работник получил $\frac{6}{20}x = \frac{3}{10}x$

Из условия задачи получаем уравнение

$$\frac{3}{10}x - \frac{4}{17}x = 22000$$

$$\frac{51}{170}x - \frac{40}{170}x = 22000$$

$$\frac{11}{170}x = 22000$$

$$x = 340000$$

Пример 11. Цены на огурцы упали на $16\frac{2}{3}\%$, для того, что бы сменить ценник продавцу достаточно было поменять местами цифры стоимости 1 кг огурцов.

Сколько стоил килограмм огурцов до удешевления, если эта цифра выражалась двузначным числом?

До удешевления цена составляла \overline{xy} рублей, где x, y – цифры, причём, $x \geq 1$, так как число двузначное число т.е. цена составляла $10x+y$ рублей.

После удешевления, аналогично, $\overline{yx} = 10y + x$

По условию цена уменьшилась на $16\frac{2}{3}\%$,
следовательно

$$\frac{100 - 16\frac{2}{3}}{100}(10x + y) = 10y + x$$

$$25(10x + y) = 30(10y + x)$$

$$44x = 55y$$

$$\frac{250}{300}(10x + y) = 10y + x$$

$$5(10x + y) = 6(10y + x)$$

$$4x = 5y$$

Получаем, что правая часть делится на 5, следовательно левая часть также делится на 5, т.е. x делится на 5, т.к. x – цифра, большая нуля, то $x=5$, тогда $y=4$. Первоначальная цена 54 рубля

Пример 12. Из водоплавающих животных в заповеднике обитают бобры, ондатры и выдры. Найдите вероятность того, что случайно встреченное животное окажется ондатрой, если из трех следующих утверждений два истинны, а одно ложно

1. Бобры составляют 44% водоплавающих животных заповедника;
2. ондатры составляют 77% водоплавающих животных заповедника;
3. Выдры составляют 33% водоплавающих животных заповедника.

Предположим, что 2 утверждение истинно, тогда оба утверждения 1 и 3 – ложны (не может быть сумма животных больше 100%

По условию задачи только одно утверждение задачи ложно, следовательно 2 – ложное, а 1 и 3 истинно.

Имеем $100\% - 44\% - 33\% = 23\%$ составляют ондатры.

Искомая вероятность 0,23.

Ответ 0,23

Пример 13. В магазине 2 отдела: галантерея и одежды.

Если бы дневная выручка отдела галантереи увеличилась вчетверо, то дневная выручка магазина увеличилась бы на 48%.

На сколько процентов уменьшилась бы дневная выручка магазина, если бы дневная выручка отдела одежды сократилась втрое?

Увеличение в 4 раза выручки отдела галантереи означает, что к сумме выручки добавились еще три такие суммы. Значит одна такая сумма составляет

$$48\% : 3 = 16\%$$

Поэтому сумма дневной выручки отдела одежды

$$100\% - 16\% = 84\%$$

Если дневная выручка отделе одежды сократится втрое, то общая сумма выручки магазина уменьшится на 2 трети выручки

Отдела одежды что составит

$$\frac{2}{3} \cdot 84 = 56\%$$

Ответ 56%

Пример 14

Процент числа учеников 11 класса, поехавших на экскурсию, заключен от 92,5% до 95,6%.

Найдите наименьшее возможное число учеников этого класса.

Решение. Из условия следует, что процент учеников не поехавших на экскурсию составляет от 4,4% до 4,8% числа учеников этого класса.

Число учеников этого класса будет наименьшим, если на экскурсию не поехал 1 ученик.

Таким образом

$$0,044x \leq 1 \leq 0,048x$$

Откуда

$$\begin{cases} x \leq \frac{1000}{44}, \\ x \geq \frac{1000}{48} \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 22\frac{8}{11}, \\ x \geq 20\frac{5}{6}. \end{cases}$$

Наименьшим целым числом x ,
удовлетворяющем последней системы
неравенств, является 21.

Ответ 21.

Задачи для самостоятельного решения

1. Фонд заработной платы фирмы А. составил 228 800 рублей и был распределён между Алексеем, Егором, Николаем, Петром и Григорием в соотношении 2 : 5 : 6 : 4 : 5 соответственно. Определите, сколько рублей получил Николай.
2. Призовой фонд лотереи в размере 1 200 000 рублей был распределён между семью победителями в соотношении 2 : 9 : 3 : 3 : 10 : 7 : 6. Сколько рублей получил третий победитель после уплаты подоходного налога в размере 13%?
3. Типография должна отпечатать за лето 268 000 книг. В первый месяц было изготовлено 15% запланированных книг, а во второй — 55% от оставшихся. Сколько книг необходимо отпечатать за третий месяц?
4. Цена пачки сосисок сначала повысилась на 14%. Сколько стоила пачка сосисок до повышения цены, если после последующего понижения цены на 15% она стоит 135 рублей 66 копеек?
5. Цена на мясо на городском рынке в начале декабря понизилась на 10%, а в конце декабря повысилась на 10%. На сколько процентов цена на мясо в конце декабря после повышения стала ниже, чем в начале декабря до понижения?
6. Восемь одинаковых пирожных дешевле торта на 12%. На сколько процентов 14 таких же пирожных дороже торта?
7. На организацию поиска клада Евгений, Пётр, Василий и Николай собрали 2 500 000 рублей. Евгений внёс 17% собранной суммы, Пётр внёс 250 000 рублей, Василий внёс 0,32 собранных денег, а остальные деньги внёс Николай. Они договорились, что в случае удачи прибыль будет делиться пропорционально проценту внесённых денег. Удача сопутствовала им, и они с учётом налогового вычета получили 6 000 000 рублей. Сколько рублей получил Николай?
8. Цена ноутбуков, не проданных в текущем году, уменьшалась каждый последующий год на одно и то же число процентов от предыдущей цены. На сколько процентов каждый год уменьшалась цена ноутбука, если, выставленный на продажу за 40 000 рублей, он через два года был продан за 23 104 рубля?
9. В течение года цена принтера два раза снижалась на один и тот же процент. Первоначальная цена составляла 8200 рублей. После второго снижения она составила 4018 рублей. На сколько процентов снижалась цена каждый раз?

10. Частный предприниматель продал куртки со скидкой 40% и получил при этом прибыль 80% (по сравнению с закупочной ценой). Определите, сколько процентов прибыли он предполагал получить первоначально?

11. Цена на пылесос, который продаётся в Брянске, ниже, чем цена на такой же пылесос, который продаётся в Астрахани, на $q\%$. На сколько процентов цена на пылесос в Астрахани выше, чем цена на пылесос в Брянске? В ответе укажите число процентов.

12. Первоначальная выработка продукции за год работы агрофермы возросла на $\alpha\%$, а на следующий год она стала на 20% больше, чем в предыдущем году. В результате после 2 лет работы годовая выработка увеличилась на 36,8% по сравнению с первоначальной. Найдите, чему равно α .

13. Универмаг закупил некоторое количество апельсинов и начал их реализацию по цене на 30% выше цены, назначенной поставщиком, чтобы покрыть затраты, связанные с транспортировкой, и некоторые другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть апельсинов универмаг уценил на 18%, чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у поставщика и транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной поставщиком, составляла транспортировка апельсинов?

14. Прежде чем попасть на прилавок магазина в деревне Обделёновка, мобильный телефон проходит через четырёх посредников, которые увеличивают цену предыдущего этапа на 20%, 25%, 30% и 20% соответственно.

После этого владелец магазина сделал наценку, равную $\frac{1}{2}$ от цены, по которой он закупил товар у посредника. На сколько процентов больше придётся заплатить жителю деревни Обделёновка по сравнению с отпускной ценой компании-производителя?

15. Грамотное продвижение на рынке позволило компании за два года увеличить товарооборот в 25 раз, при этом ежегодный процент прироста оставался одним и тем же. Определите, на сколько процентов увеличивались продажи каждый год.

16. Бизнесмен Кроликов получил в 2005 году прибыль в размере 2000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 400% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Кроликов за 2008 год?