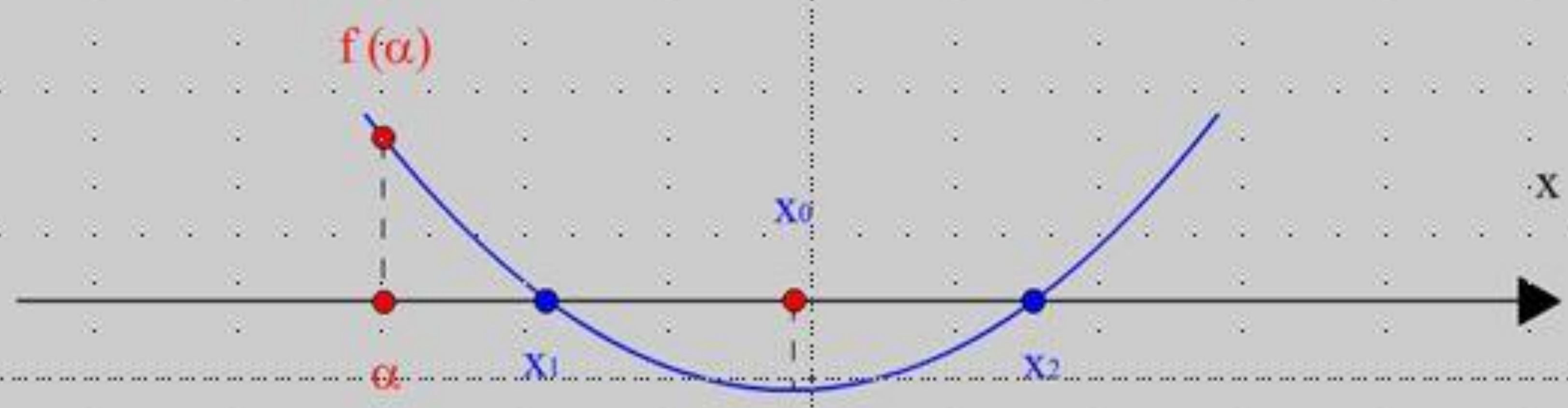
Расположение корней квадратного уравнения

Теорема 1 (ветви параболы направлены вверх)



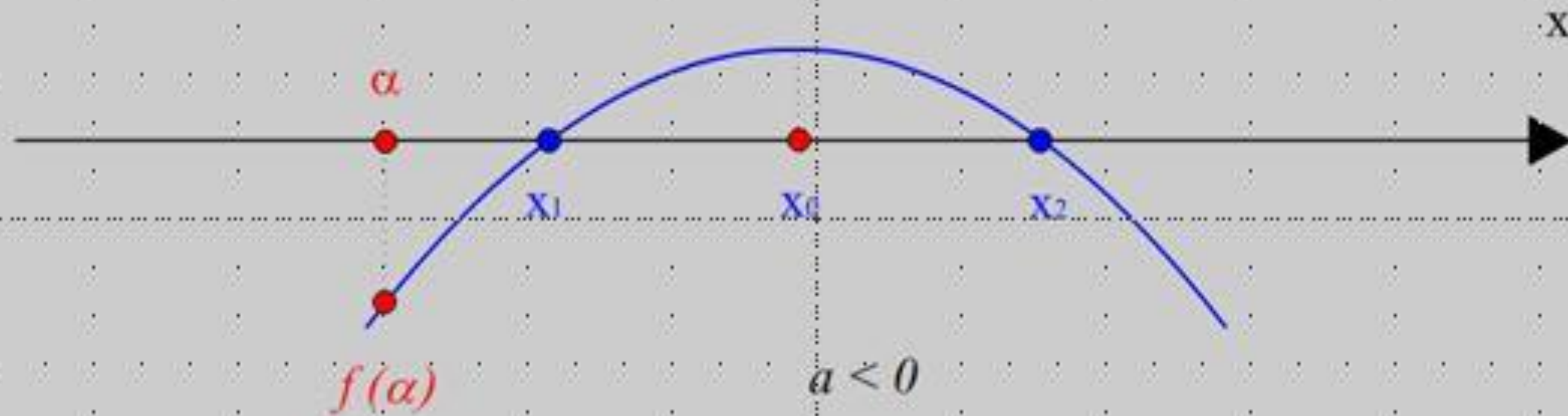
$a > 0$

$D \geqslant 0$

$x_0 > \alpha$

$f(\alpha) > 0$

Теорема 1 (ветви параболы направлены вниз)



$a < 0$

$D \geqslant 0$

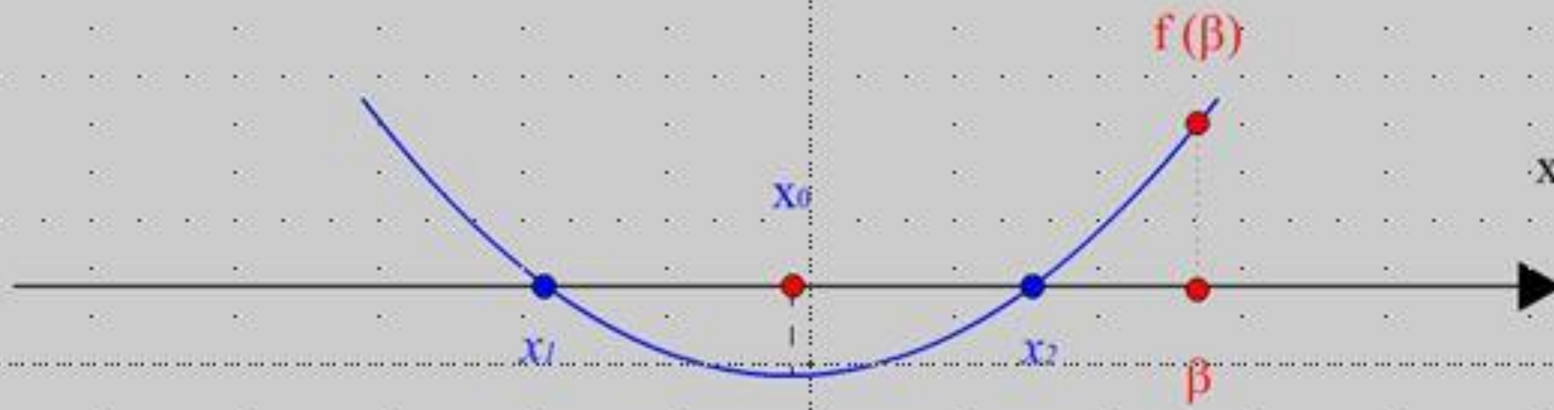
$x_0 > \alpha$

$f(\alpha) < 0$

Теорема 1

$$\alpha < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 > \alpha, \\ f(\alpha) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 > \alpha, \\ f(\alpha) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 > \alpha. \end{cases}$$

Теорема 2 (ветви параболы направлены вверх)



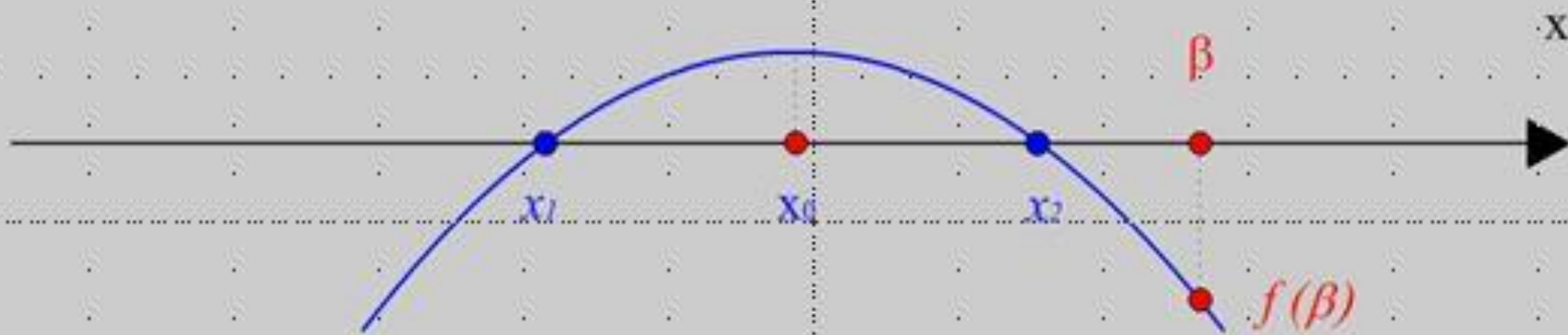
$a > 0$

$D \geqslant 0$

$x_0 < \beta$

$f(\beta) > 0$

Теорема 2 (ветви параболы направлены вниз)



$a < 0$

$D \geqslant 0$

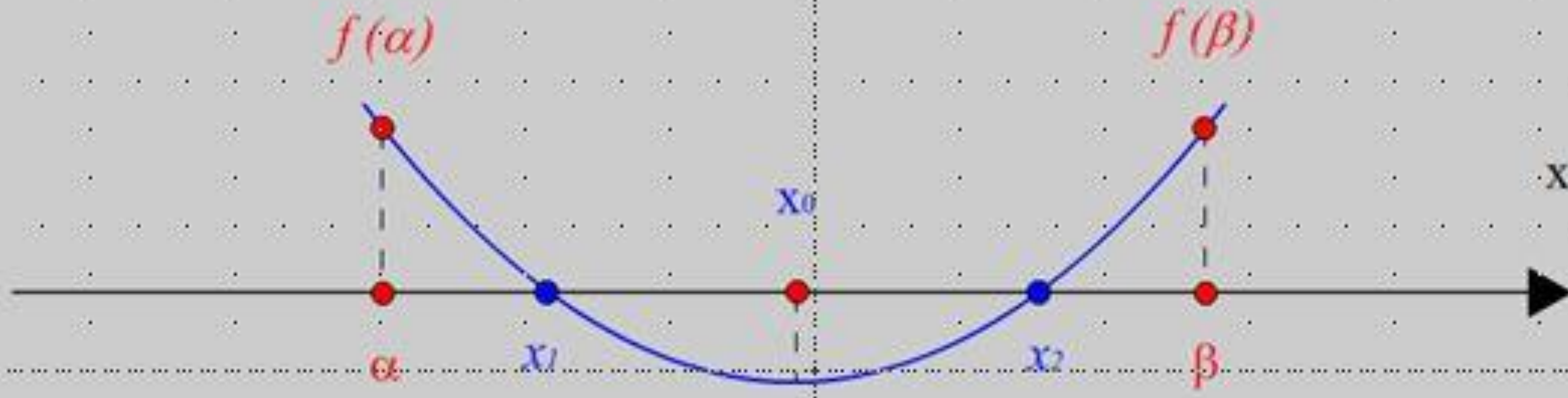
$x_0 < \beta$

$f(\beta) < 0$

Теорема 2

$$x_1 \le x_2 < \beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ D \ge 0 \\ x_0 < \beta \\ f(\beta) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ D \ge 0 \\ x_0 < \beta \\ f(\beta) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\beta). > 0 \\ D \ge 0 \\ x_0 < \beta \end{cases}$$

Теорема 3 (ветви параболы направлены вверх)



$$a > 0$$

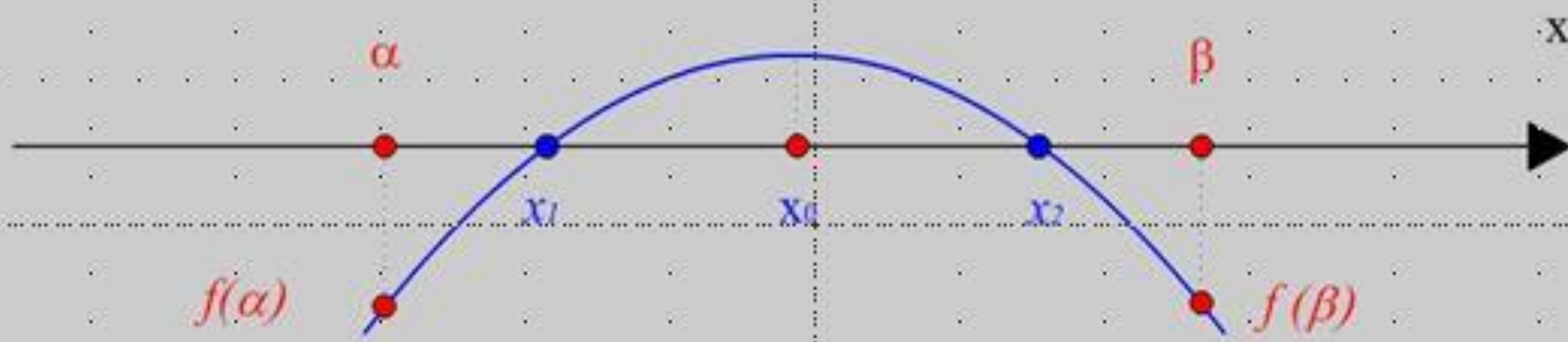
$$D \geqslant 0$$

$$\alpha < x_0 < \beta$$

$$f(\alpha) > 0$$

$$f(\beta) > 0$$

Теорема 3 (ветви параболы направлены вниз)



$$a < 0$$

$$D \geqslant 0$$

$$\alpha < x_0 < \beta$$

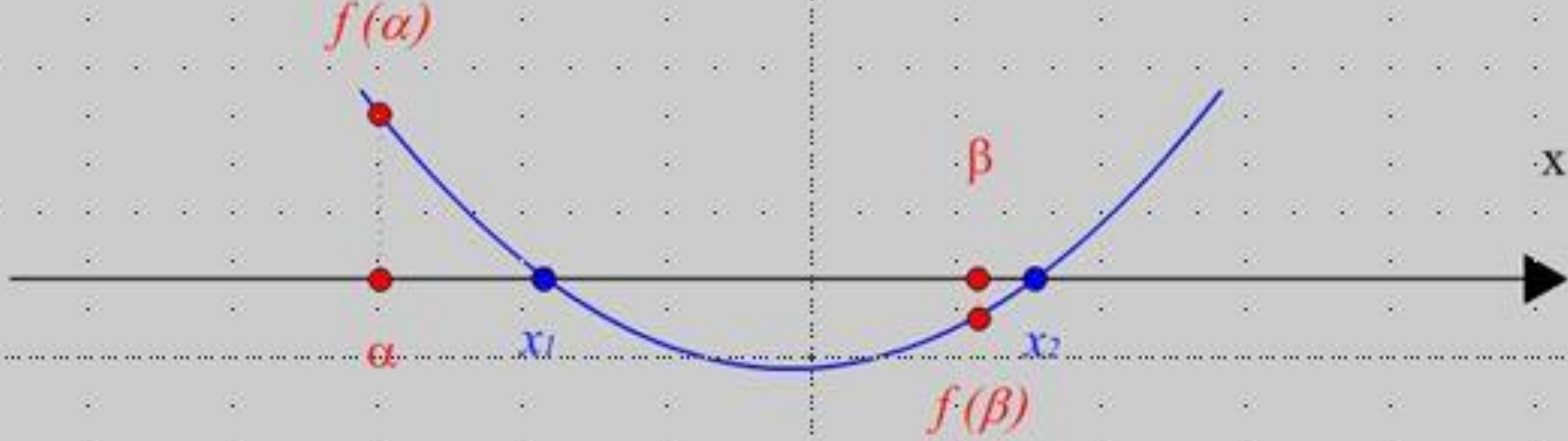
$$f(\beta) < 0$$

$$f(\alpha) < 0$$

Теорема 3

$$\alpha < x_1 \le x_2 < \beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ D \ge 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ D \ge 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \\ f(\alpha) < 0 \\ f(\beta) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \\ D \ge 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \end{cases}$$

Теорема 4 (ветви параболы направлены вверх)

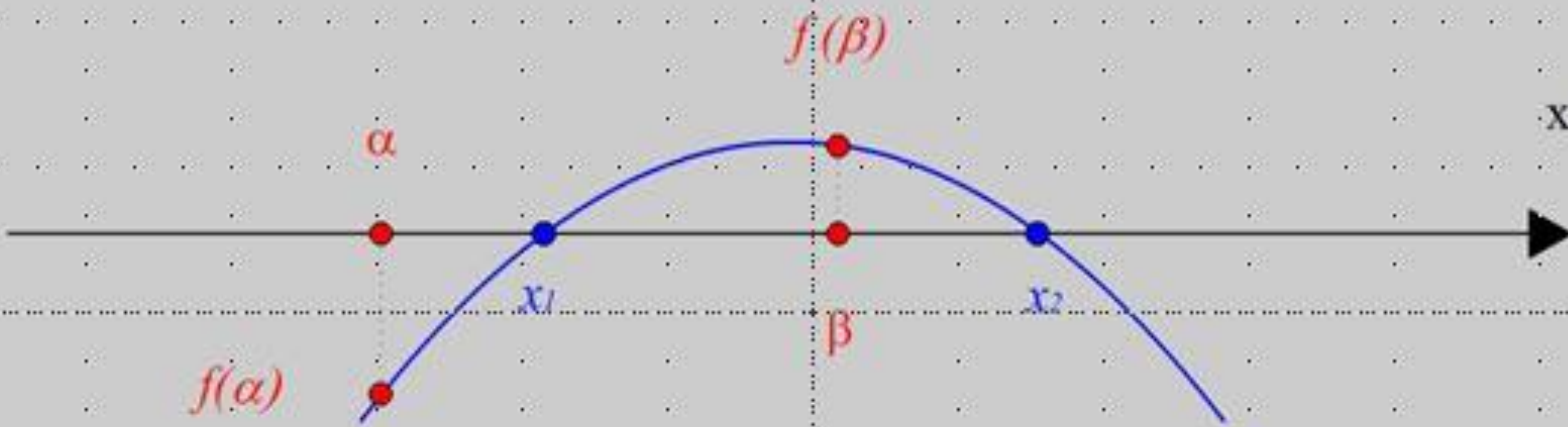


$a > 0$

$f(\alpha) > 0$

$f(\beta) < 0$

Теорема 4 (ветви параболы направлены вниз)



$a < 0$

$f(\alpha) < 0$

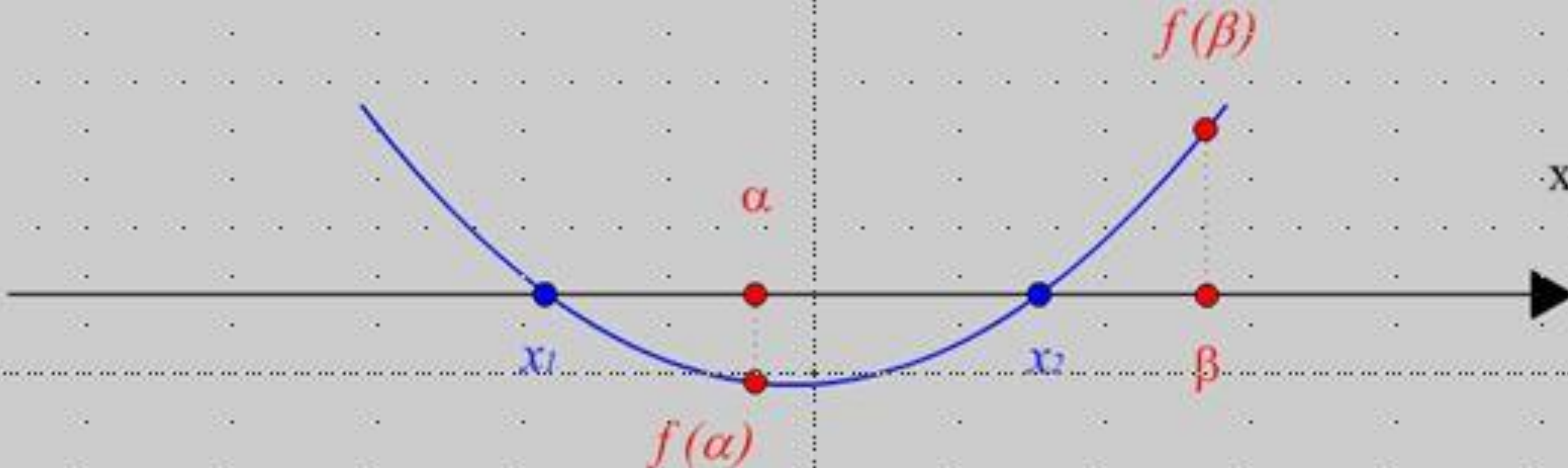
$f(\beta) > 0$

stop play

Теорема 4

$$\alpha < x_1 < \beta < x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$$

Теорема 5 (ветви параболы направлены вверх)



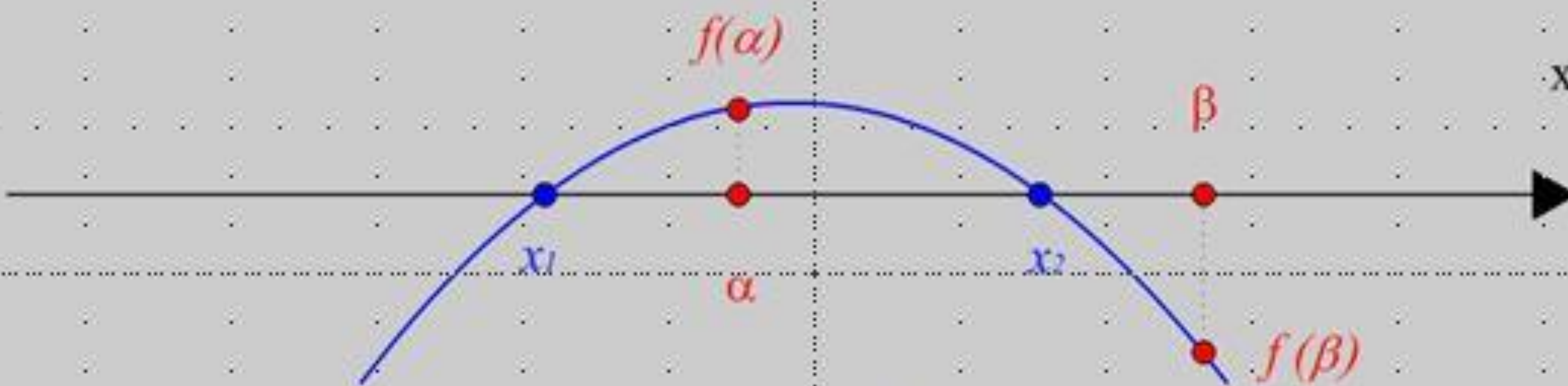
$a > 0$

$f(\alpha) < 0$

$f(\beta) > 0$

stop play

Теорема 5 (ветви параболы направлены вниз)



$a < 0$

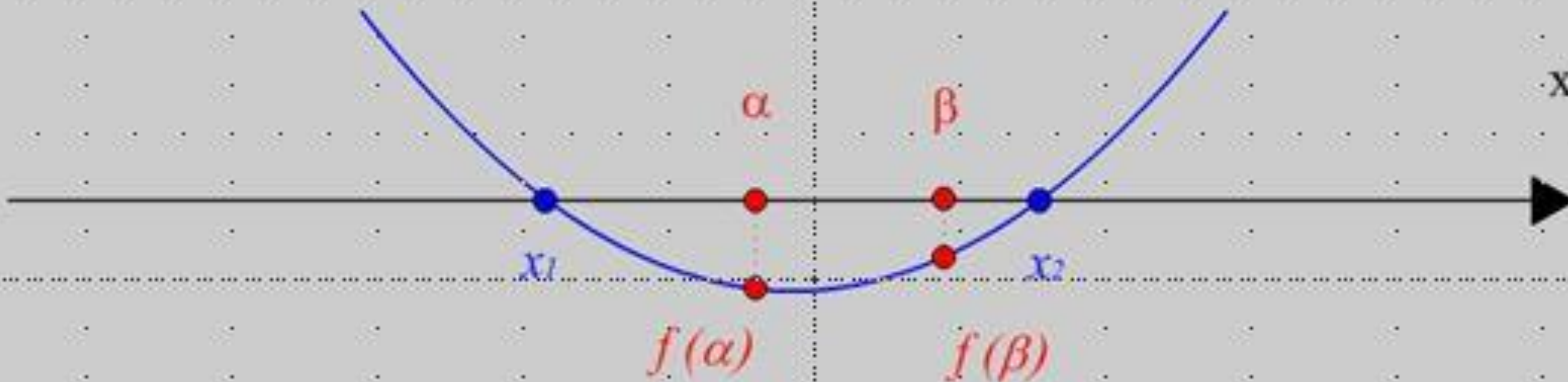
$f(\alpha) > 0$

$f(\beta) < 0$

Теорема 5

$$x_1 < \alpha < x_2 < \beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ f(\alpha) < 0 \\ f(\beta) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$$

Теорема 6 (ветви параболы направлены вверх)

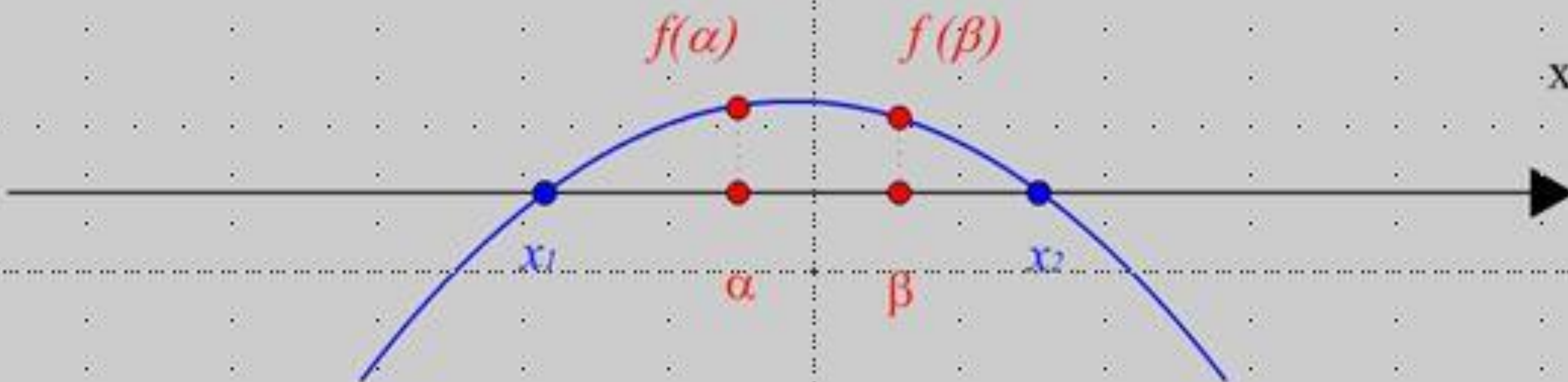


$$a > 0$$

$$f(\alpha) < 0$$

$$f(\beta) < 0$$

Теорема 6 (ветви параболы направлены вниз)



$$a < 0$$

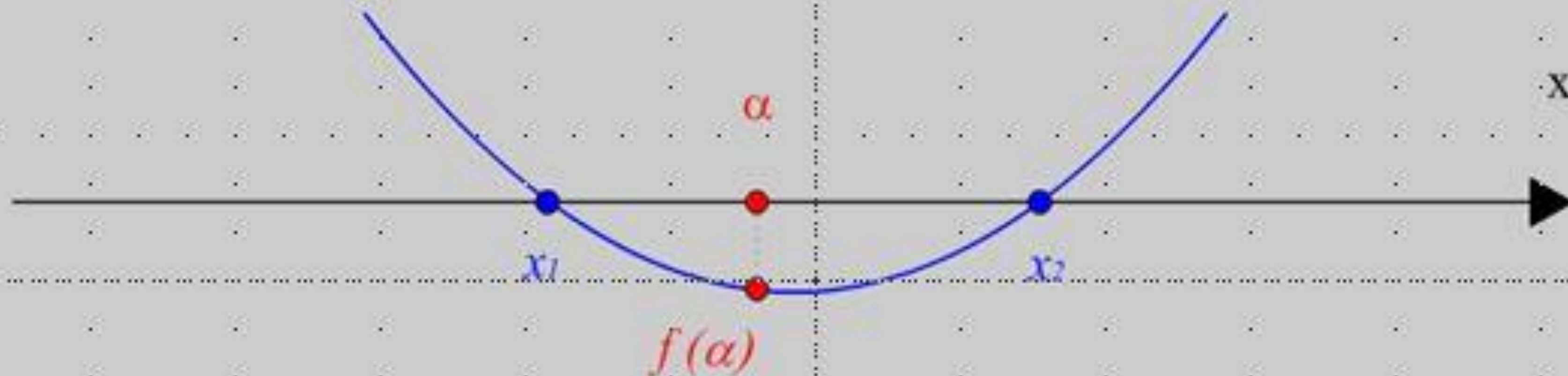
$$f(\alpha) > 0$$

$$f(\beta) > 0$$

Теорема 6

$$x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ f(\alpha) < 0 \\ f(\beta) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) > 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$$

Теорема 7 (ветви параболы направлены вверх)

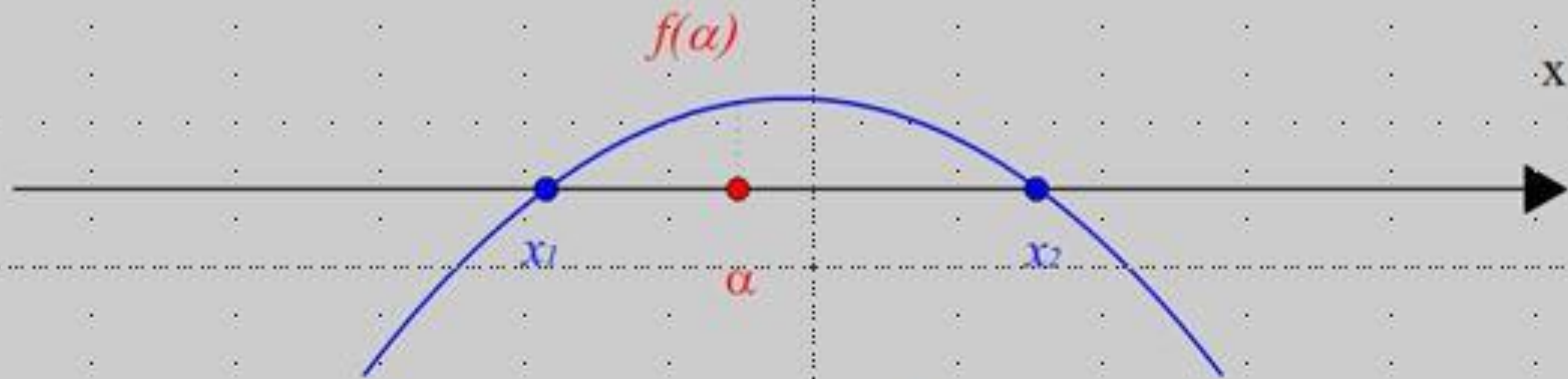


$a > 0$

$f(\alpha) < 0$

skip play

Теорема 7 (ветви параболы направлены вниз)



$a < 0$

$f(\alpha) > 0$

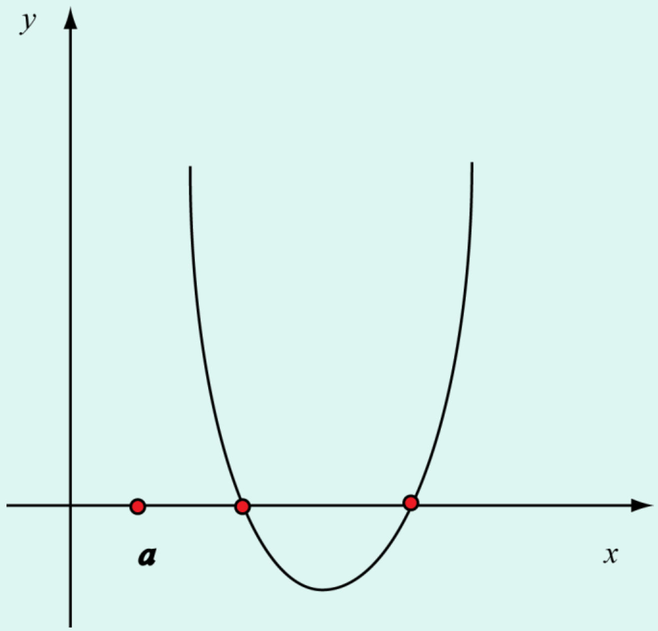
Теорема 7

$$x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ f(\alpha) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(\alpha) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a \cdot f(\alpha) < 0$$

Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения

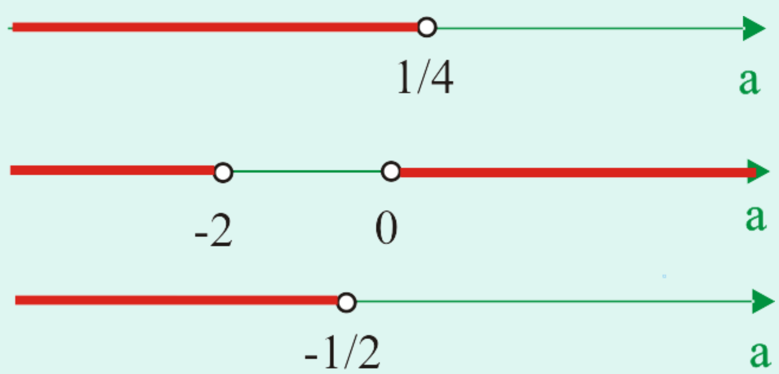
$$x^2 + x + a = 0$$

действительные, различные и оба больше a.



$$\begin{cases} D > 0, \\ f(a) > 0, \\ x_в > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a > 0, \\ a^2 + 2a > 0, \\ -\dfrac{1}{2} > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} a < -2, \\ a > 0, \end{array}\right. \\ a < -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Находим пересечение решений каждого из неравенств

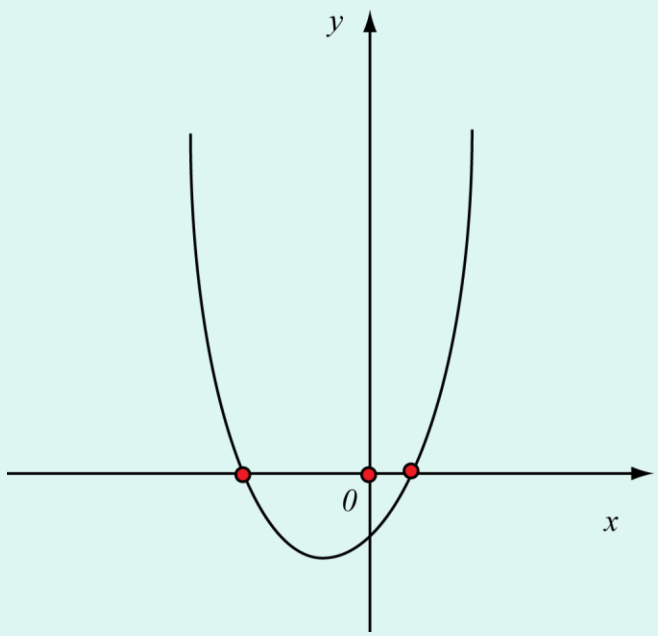


Ответ $a \in (-\infty; -2)$

При каких значениях параметра a уравнение

$$2x^2-\left(a^3+8a-1\right)x+a^2-4=0$$

имеет корни разных знаков?



Для того чтобы парабола, которая является графиком функции

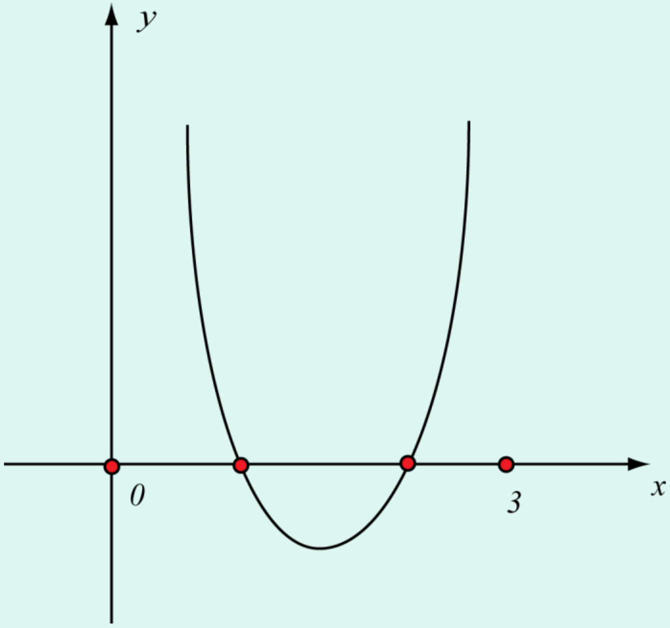
$$f(x)=2x^2-\left(a^3+8a-1\right)x+a^2-4$$

пересекала ось OX в точках, так чтобы между ними располагалось начало координат, необходимо и достаточно, чтобы $f\left(0\right)<0$

$$a^2-4<0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>-2 \\ a<2 \end{cases}$$

Ответ $a\in\left(-2;2\right)$

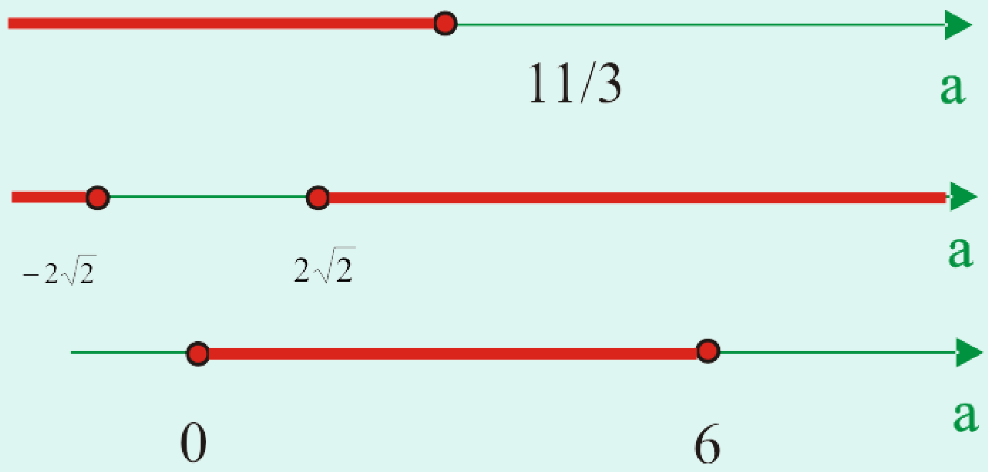
При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ принадлежат отрезку [0;3] ?



Потребуем выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ f(0) \ge 0, \\ f(3) \ge 0, \\ 0 \le x_в \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8 \ge 0, \\ 2 \ge 0, \\ 11 - 3a \ge 0, \\ 0 \le \dfrac{a}{2} \le 3. \end{cases}$$

Данную систему решаем методом интервалов



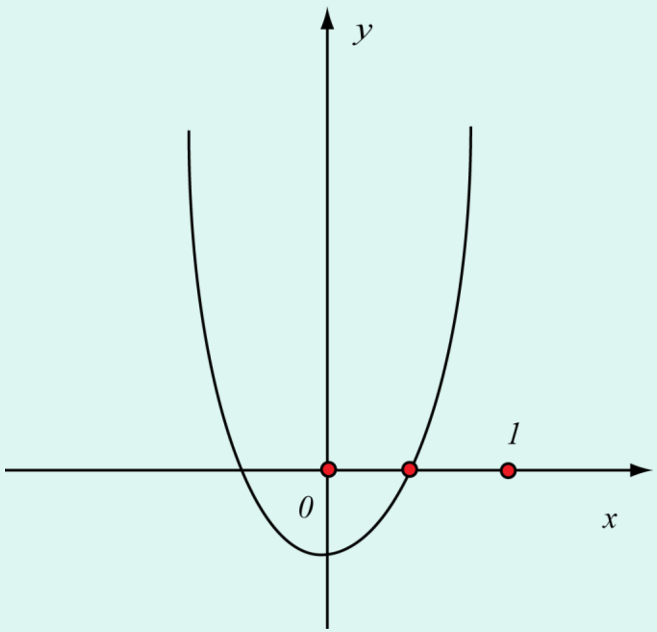
Ответ $a \in \left[2\sqrt{2}; 3\frac{2}{3}\right]$

При каких значениях параметра *a* больший корень уравнения

$$x^2 + 4x - (a-1)(a-5) = 0$$

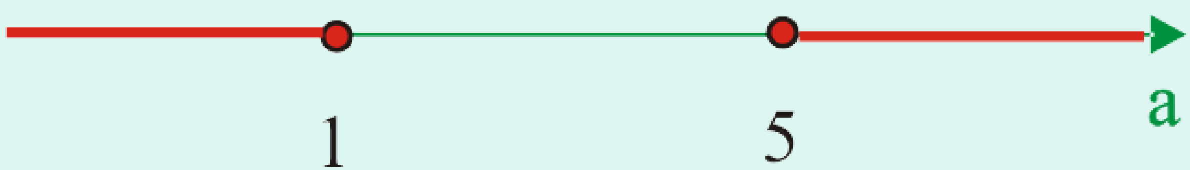
принадлежит промежутку [0;1)?

Рассмотрим параболу, являющуюся графиком функции $f(x) = x^2 + 4x - (a-1)(a-5)$



$$\begin{cases} f(0) \le 0, \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(a-1)(a-5) \le 0, \\ 5-(a-1)(a-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a-5) \ge 0, \\ a^2 - 6a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \le 1, \\ a \ge 5, \end{array} \right. \\ 0 < a < 6 \end{cases}$$

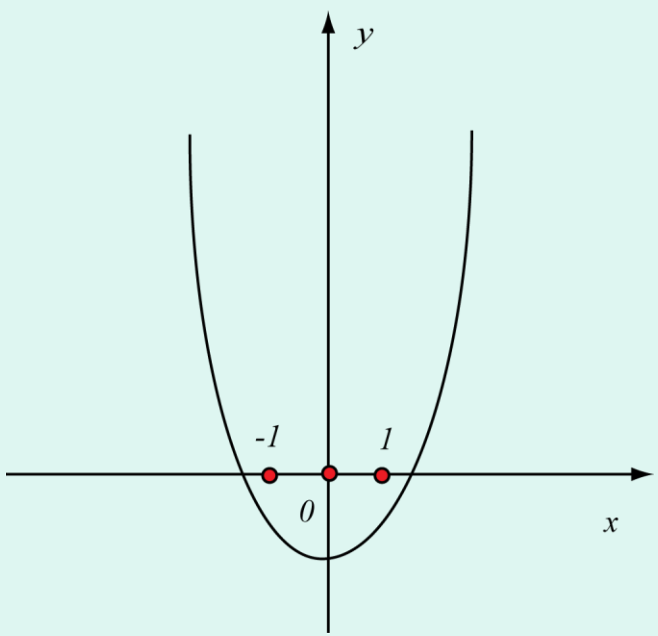


Ответ $a \in (0;1] \cup [5;6)$

При каких значениях параметра a все корни уравнения $a^2x^2 - ax - 2 = 0$

лежат вне отрезка [-1;1]?

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет корни разных знаков (свободный член уравнения -2<0).

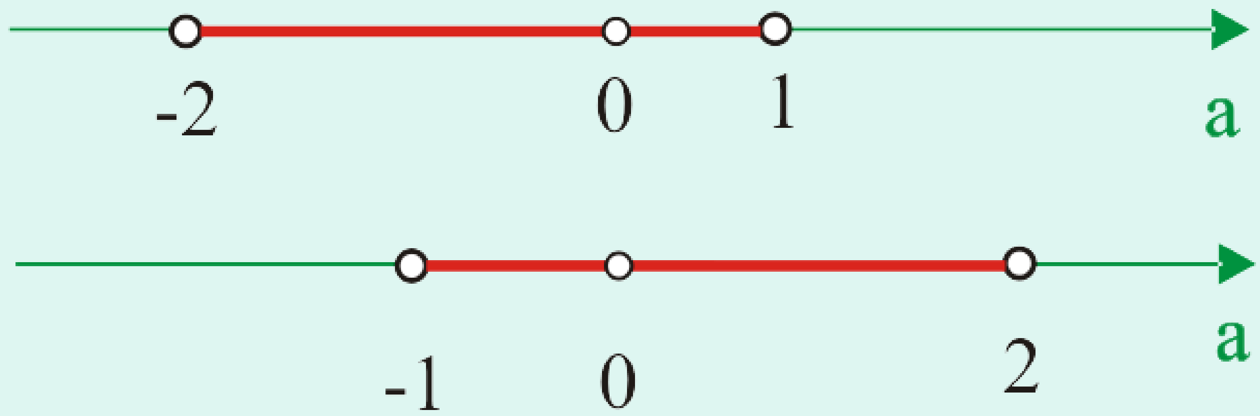


Необходимые и достаточные условия имеют вид:

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ f(-1) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ a^2 + a - 2 < 0, \\ a^2 - a - 2 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ (a+2)(a-1) < 0, \\ (a+1)(a-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ -2 < a < 1, \\ -1 < a < 2. \end{cases}$$

Пользуясь методом интервалов, ищем пересечение



Ответ $a \in (-1;0) \cup (0;1)$

Самостоятельно:

- Найти все значения параметра *a,* при которых все корни уравнения
$$ax^2+2(a+3)x+a+2=0$$
неотрицательны.

- Найти все значения параметра *a*, при которых корни уравнения
$$x^2-2(a+3)x+a+a^2=0$$
не меньше двух.

Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения

$$ax^2 - (a+1)x + a + 3 = 0$$

разных знаков.

Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения

$$x^2 - 2(a-2)x + 3a + a^2 = 0$$

меньше -1.

- Найти все значения параметра *k*, при которых уравнение

$$x^2 - (k+1)x + k^2 + k - 8 = 0$$

имеет два корня, при этом один корень меньше 2, а другой больше двух.