Введение в теорию решения задач с параметрами

§1. Основные понятия

Определение 1.1. *Параметром* (от греческого παραμετρων - отмеряющий) *называется величина, значение которой служат для различения элементов некоторого множества между собой.*

Например, в декартовых координатах уравнение $y = x^2 + a$

задает множество парабол с вершинами на оси OY.

Определение 2.1. *Неизвестные величины, значения которых мы задаем сами, называются параметром.*

$$x^4 + x^3 - (1+2a)x^2 - (a+1)x + a^2 + a = 0$$

В роли параметра лучше на первом этапе рассматривать x.

$$a^2 - (2x^2 + x - 1)a + x^4 + x^3 - x^2 - x = 0$$

Это уравнение рассматриваем, как квадратное относительно a.

$$D = (2x^2 + x - 1)^2 - 4x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x =$$

$$= 4x^4 + x^2 + 1 + 4x^3 - 4x^2 - 2x - 4x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x =$$

$$= x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$a = \frac{(2x^2 + x - 1) \pm (x+1)}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 1, \\ a = x^2 + x \end{array}\right.$$

Полученную совокупность решаем как совокупность квадратных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 1 - a = 0, \\ x^2 + x - a = 0. \end{array}\right.$$

V. Khudenko

Определение 3.1. *Областью определения уравнения с параметром* $f(x,a)=0$ *будем понимать все такие системы значений x и a, при которых уравнение имеет смысл.*

Замечание. Если найти область уравнения технически сложно, будем ограничиваться системой неравенств.

$$\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \frac{a^2-1}{2a-x} = 1$$

Определение 4.1. *Решить уравнение* $f(x,a)=0$ *с параметром* a *– указать решение при всех возможных значениях параметра* a *или установить, что их нет.*

Определение 5.1. *Уравнения* $f(x,a)=0$ *и* $\varphi(x,a)=0$ *равносильны при фиксированном значении* $a=a_0$, *если уравнения* $f(x,a_0)=0$ *и* $\varphi(x,a_0)=0$ *равносильны.*

.

§2. Линейные уравнения и к ним приводимые

1.2. Решить уравнение $m(2x-1)-m=2m(x-1)+x-3$

ОДЗ $\begin{cases} x \in R, \\ m \in R. \end{cases}$

$$2mx-m-m=2mx-2m+x-3$$

$$x=3$$

Ответ. $x=3$ при любом значении $m \in R$

2.2. Решить уравнение

$$m-\frac{5-x}{6}=\frac{2x+m}{2}-\frac{3m}{4}$$

ОДЗ $\begin{cases} x\in R, \\ m\in R. \end{cases}$

$$12m-10+2x=12x+6m-9m,$$

$$10x=15m-10$$

$$x=\frac{3m-2}{2}$$

Ответ. $x=\frac{3m-2}{2}$ при любом значении $m\in R$

V. Khudenko

3.2. Решить уравнение

$$3x - 2a = 8(x-1) + 5(a+2) - 7a - 5x$$

ОДЗ $\begin{cases} x \in R, \\ a \in R. \end{cases}$

$$3x - 2a = 8x - 8 + 5a + 10 - 7a - 5x$$

$$0 \cdot x = 0 \cdot a + 2$$

Ответ. Уравнение решения не имеет при любом значении $a \in R$

V. Khudenko

4.2. Решить уравнение

$$2(x-a)-3x=-2a-x.$$

ООУ $\begin{cases} x \in R, \\ a \in R. \end{cases}$

$$2x-2a-3x=-2a-x$$

$$0 \cdot x = 0 \cdot a$$

Ответ. x- любое число, при любом значении $a \in R$

5.2. Решить уравнение

$$\frac{2}{x-3}=\frac{1}{x+a}$$

ООУ $\begin{cases} x \neq -a, \\ x \neq 3, \\ a \in R. \end{cases}$

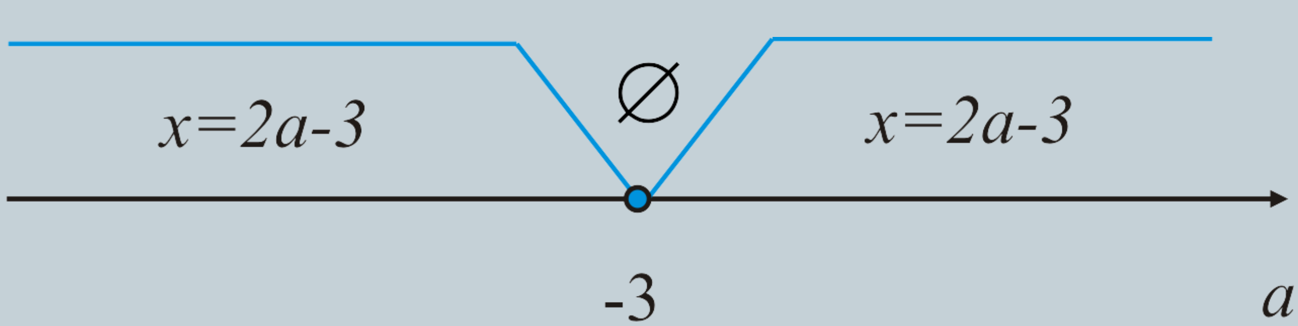
Переходим к уравнению следствию

$$2x+2a=x-3 \qquad x=-2a-3$$

Исследование

1. $\begin{cases} x=-2a-3, \\ x\neq 3 \end{cases}$ $\qquad a\neq -3$

2. $\begin{cases} x=-2a-3, \\ x\neq -a \end{cases}$ $\qquad a\neq -3$



V. Khudenko

§3. Линейные уравнения и к ним приводимые (с ветвлениями)

1.3 Решить уравнение $2a(a-2)x = a-2$

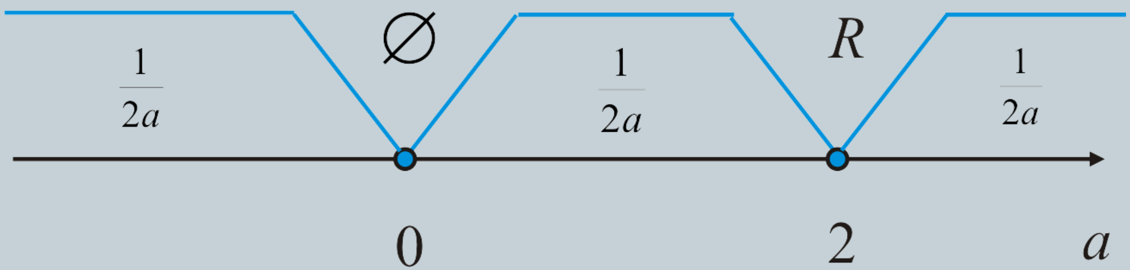
Определение 1.3. *«Контрольное» значение параметра – такое значение параметра, при котором меняются свойства уравнения.*

Имеем два контрольных значения параметра:

При a=0 получаем $0 \cdot x = -2 \Rightarrow$ решения нет;

При $a=2$ получаем $0 \cdot x=0 \Rightarrow x$ – любое;

При $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $2a \cdot x=1 \Rightarrow$ $x = \dfrac{1}{2a}$



Ответ

1. Если $a=0$ решения нет;

2. Если $a=2$ $x \in R$;

3. Если $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $x = \dfrac{1}{2a}$;

V. Khudenko

2.3 Решить уравнение

$$mx - \frac{3x}{m} - m = 7 - \frac{8}{m} - 2x$$

ООУ $\begin{cases} m \neq 0, \\ x \in R. \end{cases}$

$$m^2x - 3x - m^2 = 7m - 8 - 2mx$$

$$(m^2 + 2m - 3)x = m^2 + 7m - 8$$

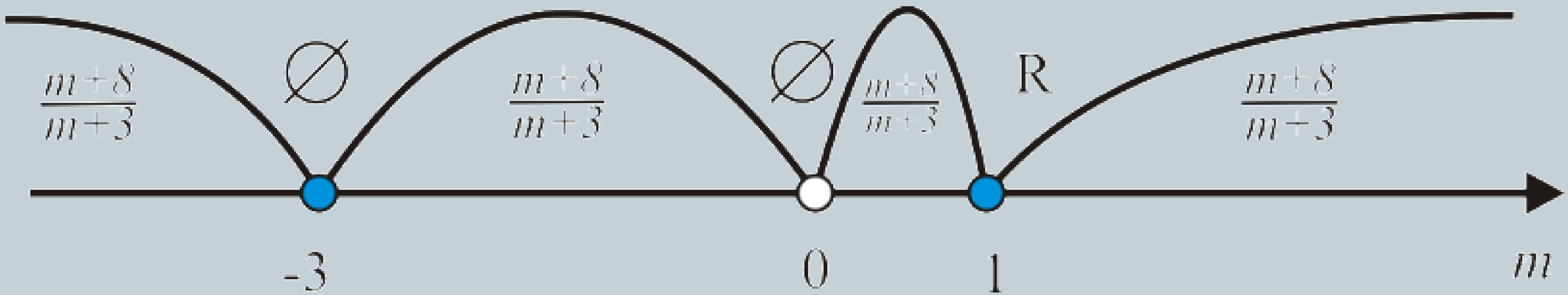
$$(m-1)(m+3)x = (m-1)(m+8)$$

Имеем два «контрольных» значения параметра.

a. *m=1* $0 \cdot x = 0$ x – любое действительное число;

b. *m*=-3 $0 \cdot x = 44$ решения нет;

c. $m \neq 1, m \neq -3$ $x = \dfrac{m+8}{m+3}$



3.3. Решить уравнение $\dfrac{2(a+1)x}{a} = 3(x+1) + \dfrac{7}{a}$

Для самостоятельного решения

$$a - a^2 x = 5 - 25x \qquad 3 + \frac{3x}{n} = n + x$$

V. Khudenko

§4. Дробно-рациональные уравнения с параметром, сводимые к линейным уравнениям

1.4. Решить уравнение

$$\frac{x-m}{(x-1)(x-2)}=0$$

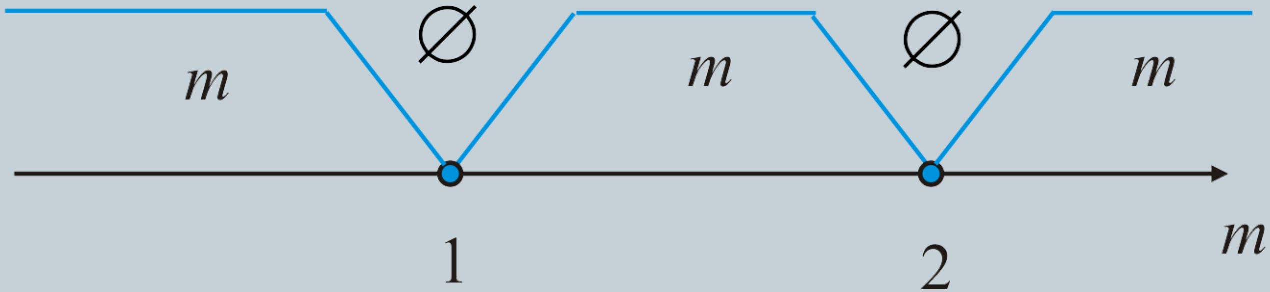
ООУ $\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 2, \\ m \in R. \end{cases}$

$$x=m$$

Исследование:

$$x=m \Rightarrow \begin{cases} m \neq 1, \\ m \neq 2 \end{cases}$$

V. Khudenko



2.4. Решить уравнение $\dfrac{a^2x-1}{x-1}=a$

ООУ $\begin{cases} x\neq 1, \\ a\in R. \end{cases}$

$$a^2x-1=ax-a$$

$$a(a-1)x=1-a$$

V. Khudenko

Имеем два контрольных значения параметра

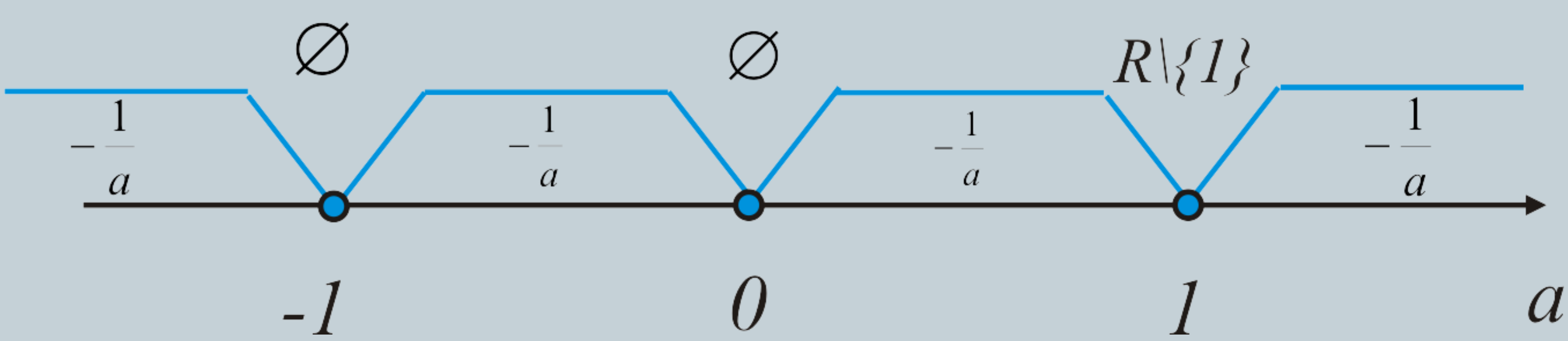
1. $a = 0 \quad 0 \cdot x = 1$ - решения нет.

2. $a = 1 \quad 0 \cdot x = 0$ *x – любое, но не равное 1;*

3. $a \neq 0 \quad a \neq 1 \quad x = -\dfrac{1}{a}$

Исследование

$$x = -\frac{1}{a} \qquad x \neq 1 \qquad 1 \neq -\frac{1}{a} \Rightarrow a \neq -1$$



V. Khudenko

3.4. Решить уравнение

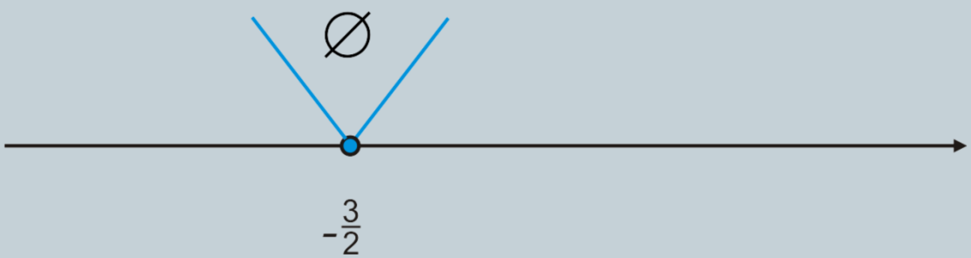
$$\frac{2ax}{x+3}-\frac{x+4a}{2x-6}=\frac{x(4a-1)}{2x-6}$$

$$\begin{cases} x\neq 3, \\ x\neq -3, \\ a\in R. \end{cases}$$

$$2ax(2x-6)-(x+4a)(x+3)=x(4a-1)(x-3)$$

$$x(3+2a)=-6a$$

Если $a=-\frac{3}{2}$ $x\cdot 0=9$ решения нет.



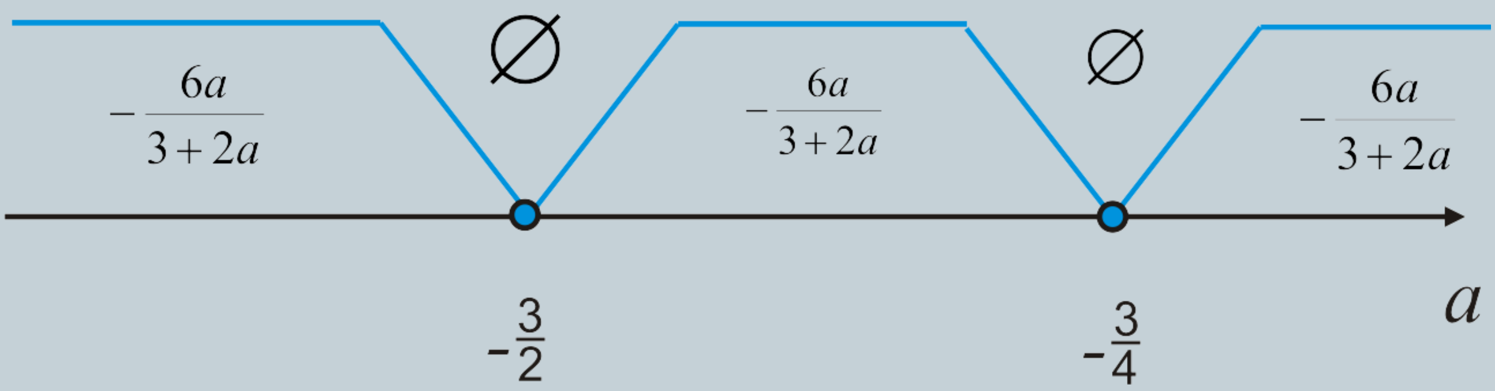
V. Khudenko

Если $a \neq -\dfrac{3}{2}$ $\quad x = -\dfrac{6a}{3+2a}$

Исследование

1. $\begin{cases} x = -\dfrac{6a}{3+2a}, \\ x \neq -3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -\dfrac{6a}{3+2a}, \\ -\dfrac{6a}{3+2a} \neq -3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -\dfrac{6a}{3+2a}, \\ 6a \neq 3(3+2a). \end{cases}$ $\quad 0 \neq 9$

2. $\begin{cases} x = -\dfrac{6a}{3+2a}, \\ x \neq 3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -\dfrac{6a}{3+2a}, \\ -\dfrac{6a}{3+2a} \neq 3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -\dfrac{6a}{3+2a}, \\ -6a \neq 3(3+2a). \end{cases}$ $\quad a \neq -\dfrac{3}{4}$



V. Khudenko

Решить уравнения

$$\frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)}+\frac{3m-11}{m-1}=\frac{2x+7}{x+3}$$

$$\frac{5}{2x-k}=\frac{3}{4-kx}$$

$$m=\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m(x-1)}$$

$$\frac{2}{a(x-3)}+\frac{3}{(a-1)(x+1)}=\frac{x-5}{a(x-3)(x+1)}$$

$$\frac{ax}{(x+2)}-\frac{2a+x}{2x-4}=\frac{x(2a-1)}{2x+4}$$

V. Khudenko