

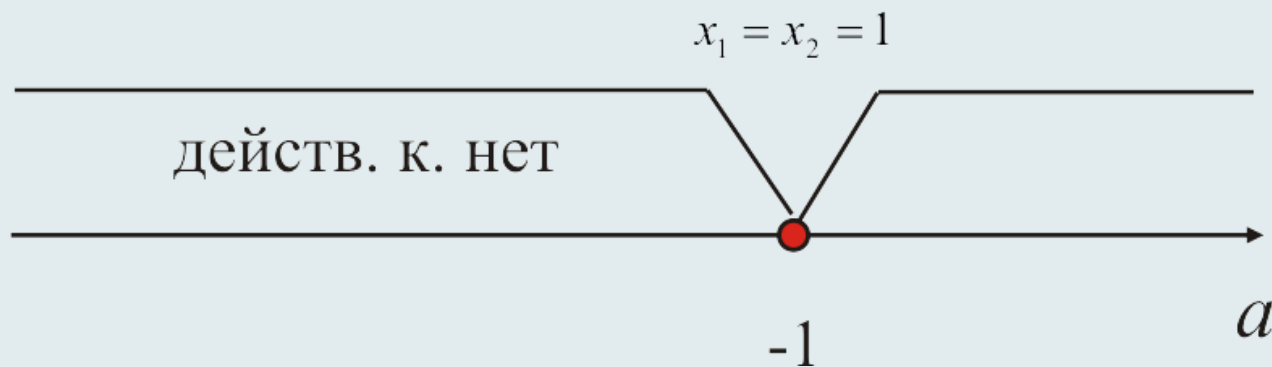
Квадратные уравнения с
параметром
и приводимые к ним

Решить уравнение $x^2 - 2x - a = 0$

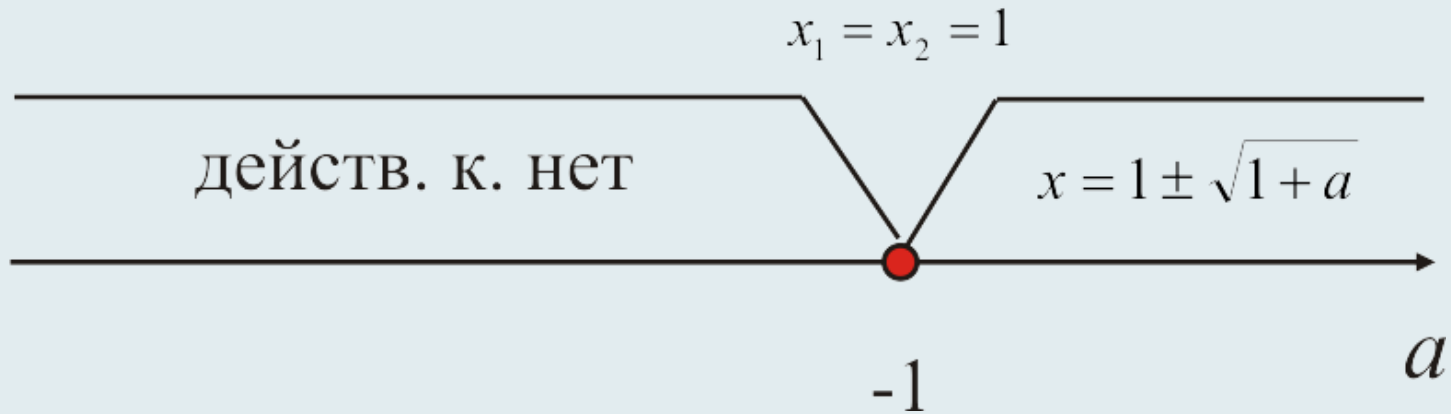
Уравнение с четным коэффициентом $\frac{D}{4} = 1 + a$

1.1. Если $1 + a = 0$ т.е. $a = -1$ $x_1 = x_2 = 1$

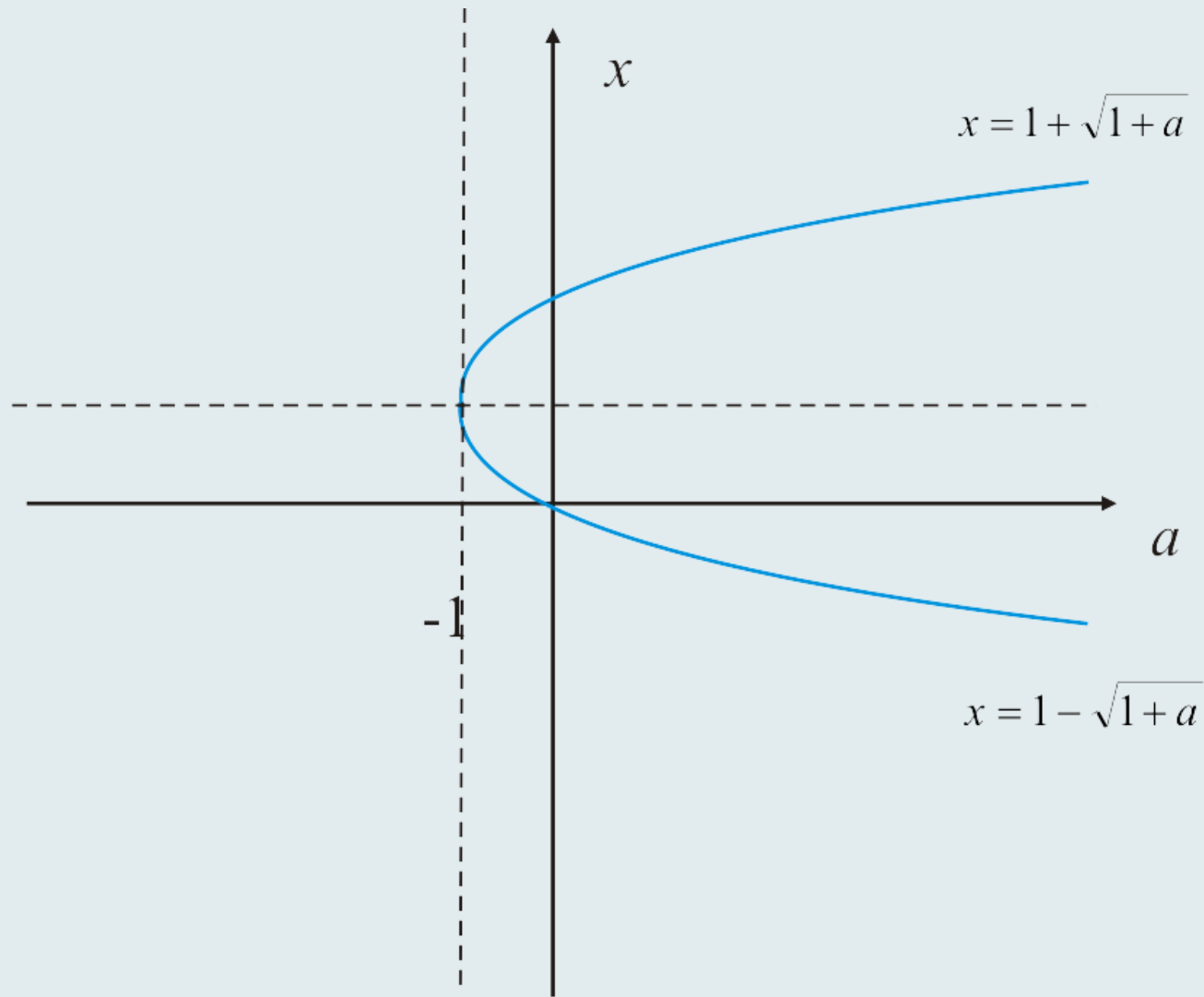
1.2. Если $1 + a < 0$ - действительных корней нет.



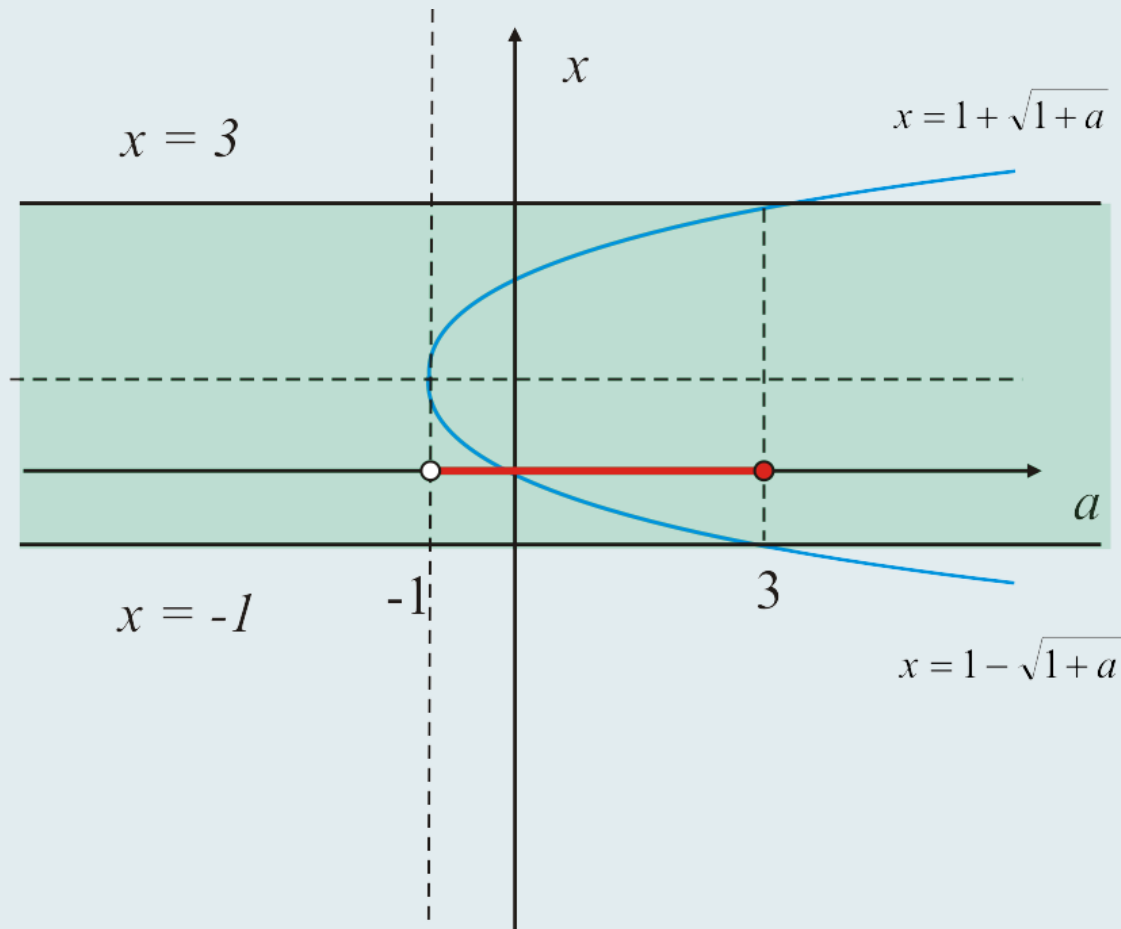
1.3 Если $1+a > 0$ $a > -1$ $x = 1 \pm \sqrt{1+a}$



Изобразим решение графически



При каких значениях параметра a уравнение имеет два различных корня, принадлежащих отрезку $[-1;3]$



Тогда $a \in (-1; 3]$

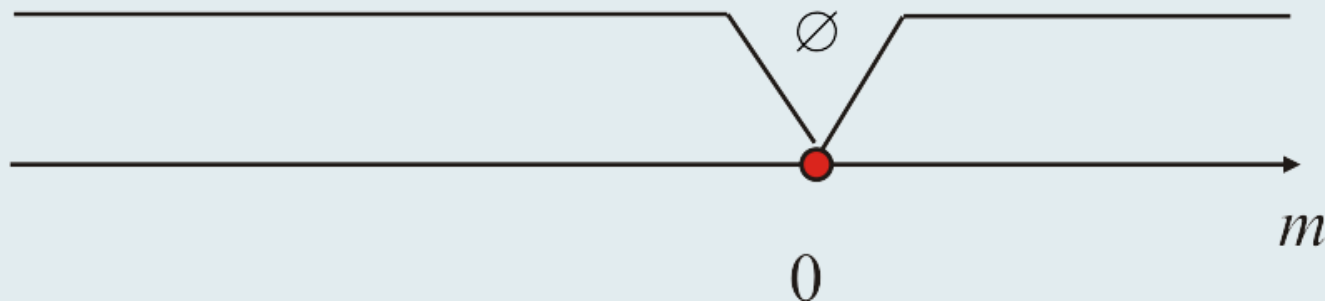
2. Решить уравнение

$$mx^2 + 3mx - (m + 2) = 0$$

$$\text{ООУ} \begin{cases} m \in R, \\ x \in R \end{cases}$$

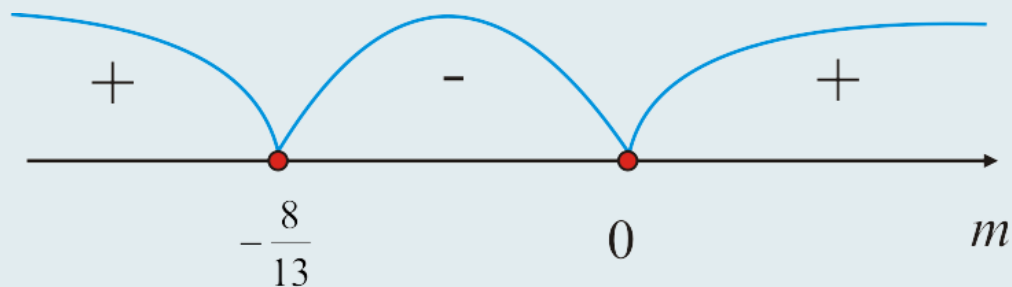
2.1. Если $m=0$, уравнение примет вид:

$$0 \cdot x - 2 = 0 \quad - \text{решения нет};$$



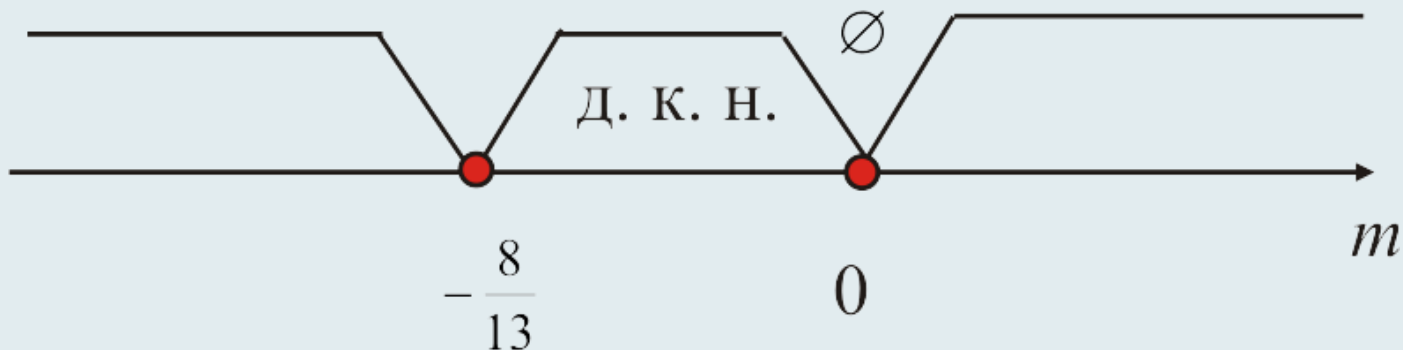
2.2. Если $m \neq 0$

$$D = 9m^2 + 4m(m + 2) = 13m^2 + 8m = m(13m + 8)$$



Знаки дискриминанта

2.3. Если $m \in \left(-\frac{8}{13}; 0\right)$ - действительных корней нет.



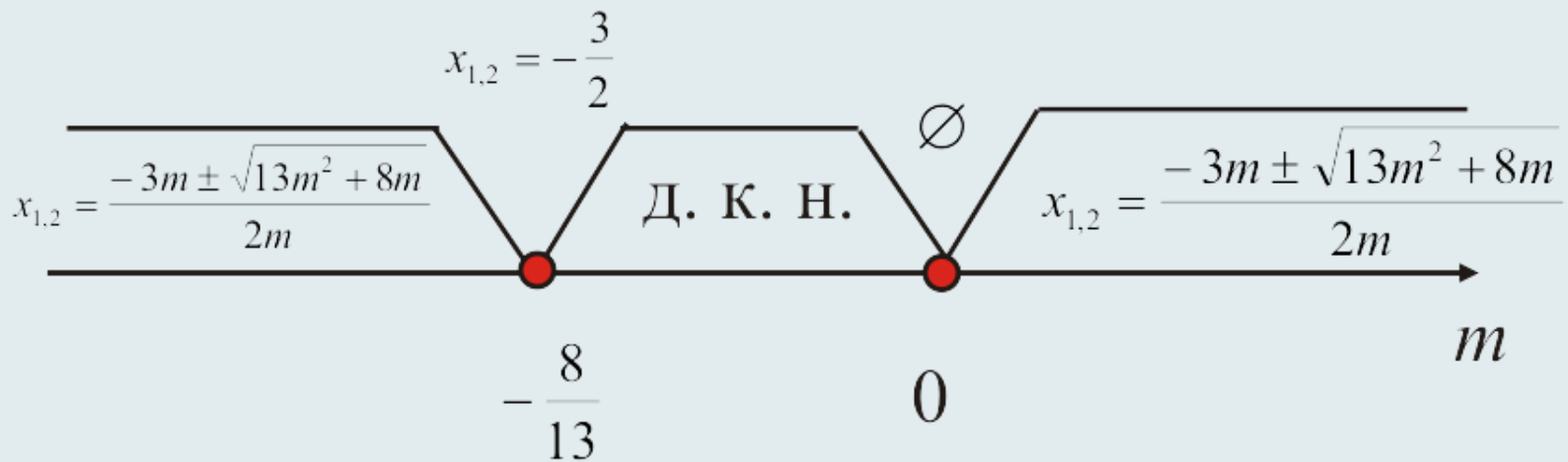
2.4. Если $m \in \left(-\infty; -\frac{8}{13}\right) \cup (0; +\infty)$

$$x_{1,2} = \frac{-3m \pm \sqrt{13m^2 + 8m}}{2m}$$

2.5. Если $D=0$, т.к. $m \neq 0$

$$m = -\frac{8}{13}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2}$$



3. Решить уравнение

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) = 0$$

Контрольное значение параметра $a=1$;

При $a=1$ получаем $6x+7=0 \Rightarrow x = -1\frac{1}{6}$;

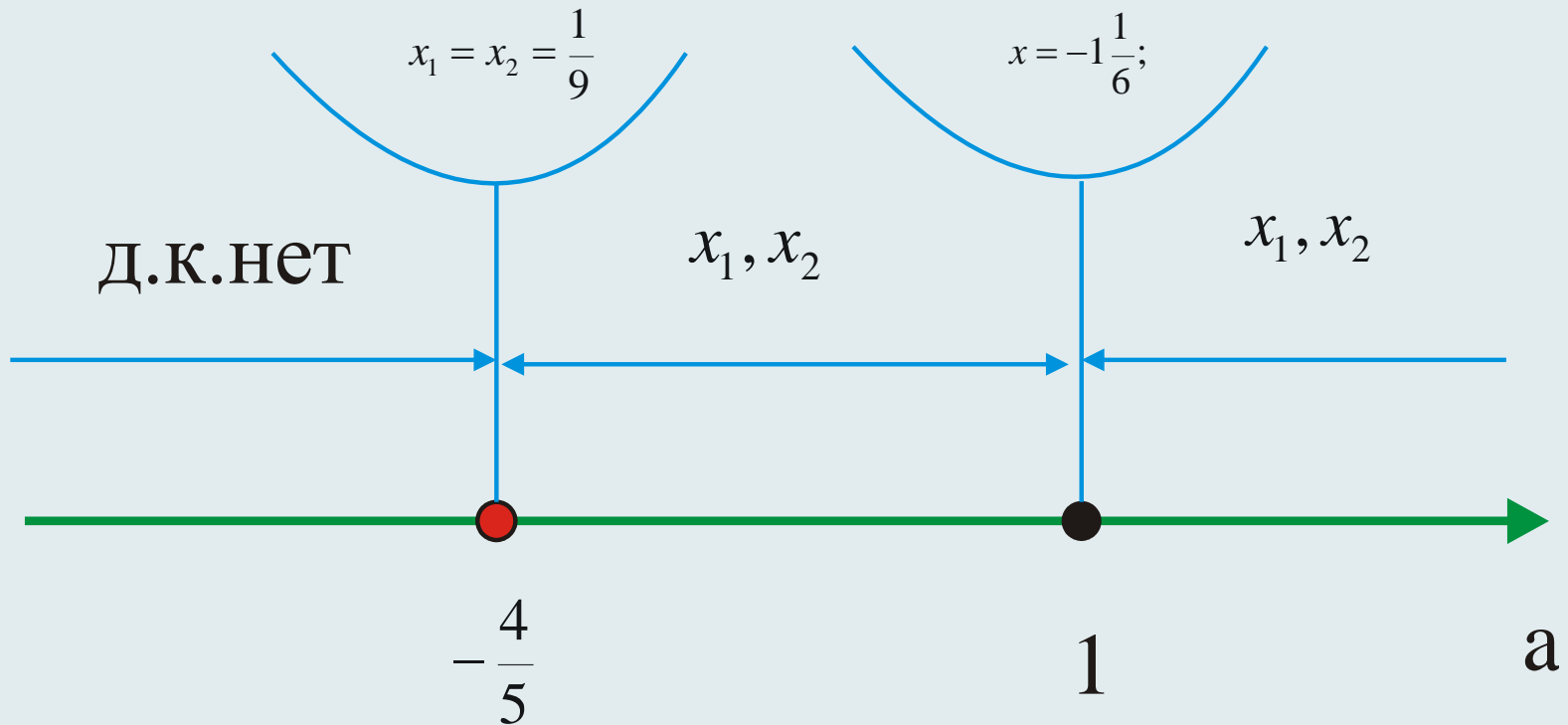
При $a \neq 1$ уравнение будет квадратным.

$$\frac{D}{4} = (2a+1)^2 - (a-1)(4a+3) = 5a+4;$$

При $a < -\frac{4}{5}$ действительных корней нет;

При $a \geq -\frac{4}{5}$ находим корни квадратного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1};$$



4. Решить уравнение $ax^2 - (a+1)x + 1 = 0$

Контрольное значение параметра $a=0$;

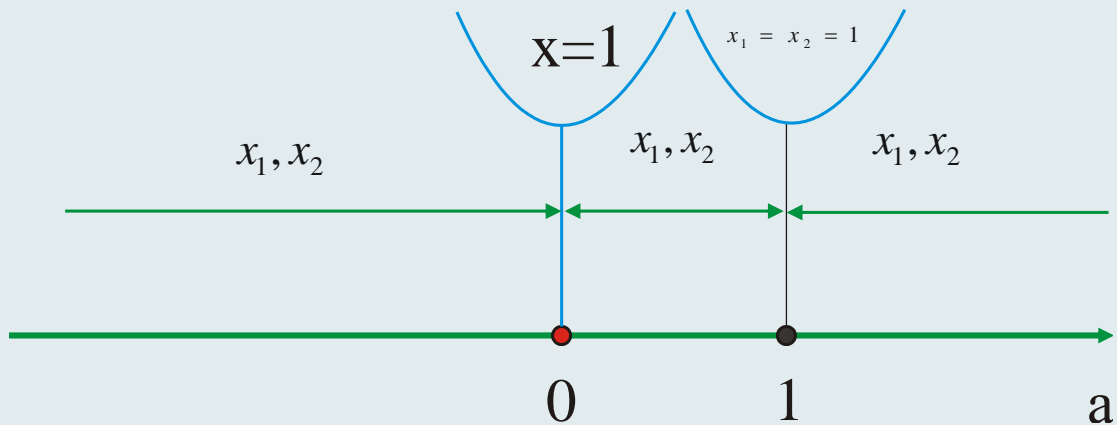
При $a=0$ получаем $-x+1=0 \Rightarrow x=1$

При $a \neq 0$

$$\begin{aligned} D &= (a+1)^2 - 4a = a^2 + 2a + 1 - 4a = \\ &= a^2 - 2a + 1 = ((a-1))^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Данное уравнение всегда будет иметь корни

$$x_1, x_2 = \frac{(a+1) \pm (a-1)}{2a}; \quad x_1 = \frac{1}{a}, \quad x_2 = 1$$



ОТВЕТ

1. Если $a < 0$ $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = 1$
2. Если $a = 0$ $x = 1$;
3. Если $0 < a < 1$ $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = 1$
4. Если $a = 1$ $x_1 = x_2 = 1$
5. Если $a > 1$ $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = 1$

Решить уравнение

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)};$$

Значение $a=0$ является контрольным, т.к.

уравнение теряет смысл, а следовательно не имеет корней.

Кроме того, $x \neq -1$ и $x \neq -2$.

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} + \frac{a^2-3}{a(x+1)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{(x+2)x - 2a(x+1) + a^2 - 3}{a(x+1)(x+2)} = 0;$$

$$x^2 + 2(1-a)x + (a^2 - 2a - 3) = 0$$

$$\frac{D}{4} = (1-a)^2 - (a^2 - 2a - 3) = a^2 - 2a + 1 - a^2 + 2a + 3 = 4$$

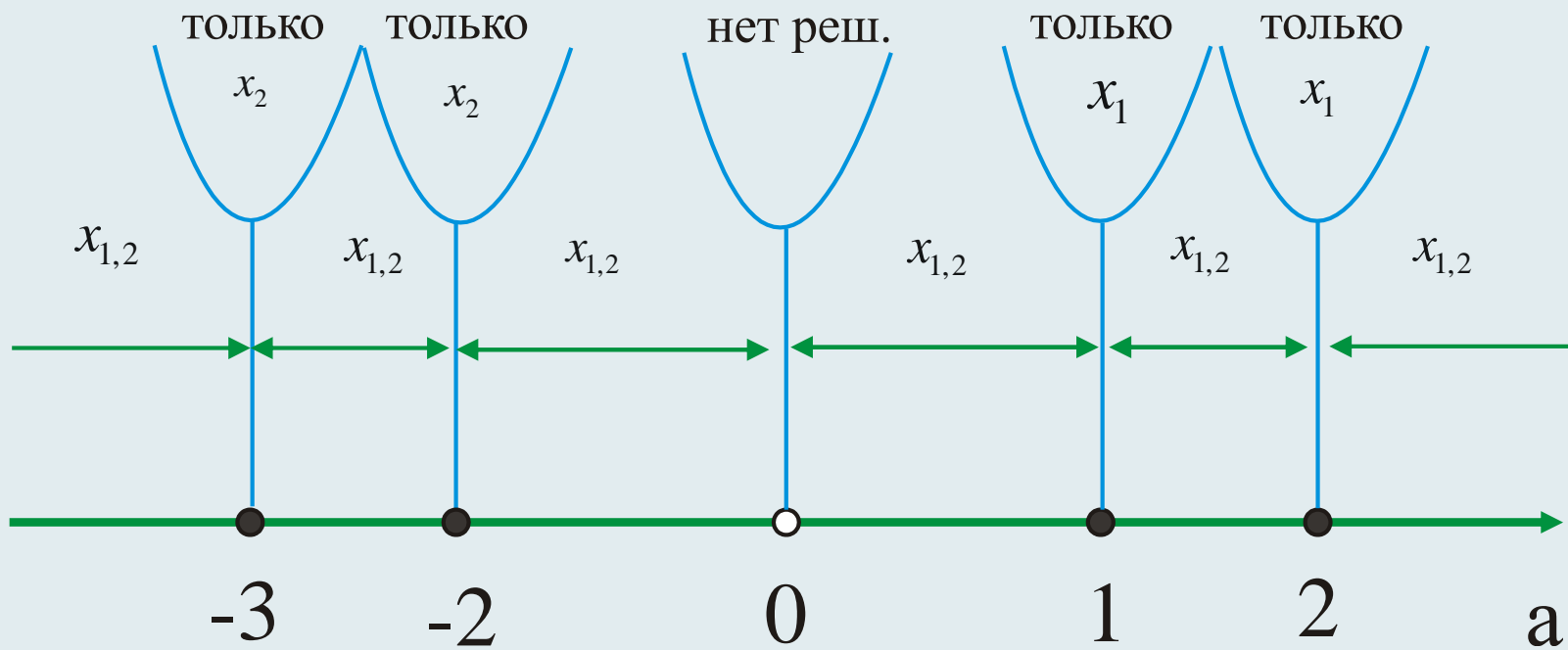
$$x_1 = a - 3, \quad x_2 = a + 1$$

Из требований О.Д.З. получаем

$$x_1 = a - 3 \neq -1 \quad a \neq 2$$

$$x_1 = a - 3 \neq -2 \quad a \neq 1$$

$$x_2 = a + 1 \neq -1 \quad a \neq -2 \quad x_2 = a + 1 \neq -2 \quad a \neq -3$$



Решить уравнение $1 - \frac{3}{x+a-1} = \frac{5a}{(x+a-1)(x+1)}$

ООУ $\begin{cases} a \in R, \\ x \neq -1, \\ x \neq 1-a. \end{cases}$

$$\frac{(x+a-1)(x+1)}{(x+a-1)(x+1)} - \frac{3 \cdot (x+1)}{(x+a-1) \cdot (x+1)} - \frac{5a}{(x+a-1)(x+1)} = 0$$

$$x^2 + x + ax + a - x - 1 - 3x - 3 - 5a = 0$$

$$x^2 + (a-3)x - (4a+4) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (a-3)^2 + 4(4a+4) = a^2 - 6a + 9 + 16a + 16 = \\ &= a^2 + 10a + 25 = (a+5)^2 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-a+3 \pm (a+5)}{2} \quad x_1 = -a-1, \quad x_2 = 4$$

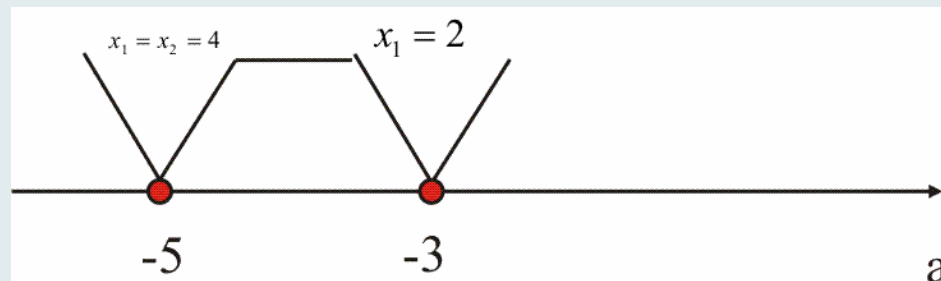
Исследование

1. $D=0$ $a=-5$ $x_1 = x_2 = 4$



2. Рассмотрим случай $4 \neq 1-a$, тогда $a \neq -3$

но первый корень $x_1 = -a-1$ при $a=-3$ $x_1 = 2$



3. Рассмотрим случай, когда первый корень

$x_1 \neq 1 - a$, тогда $-a - 1 \neq 1 - a$

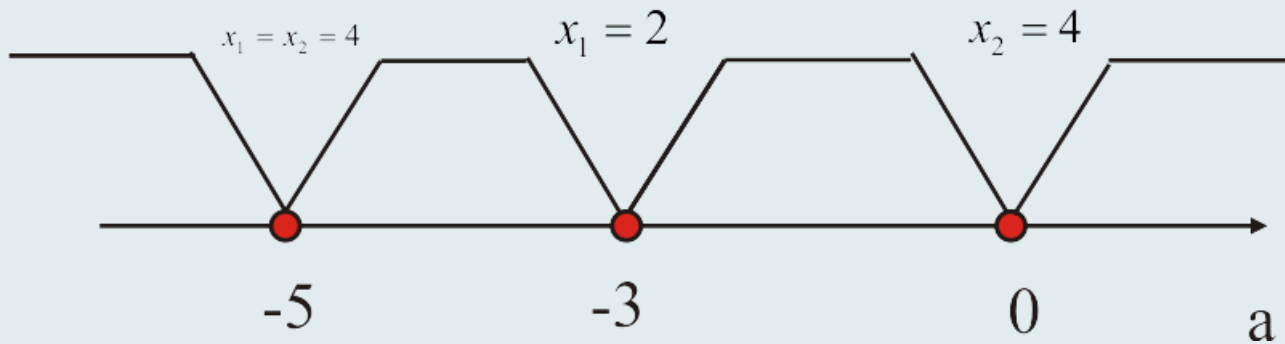
получаем, $-1 \neq 1$ что означает, что ни при каком значении параметра первый корень не будет принимать значение $1 - a$

4. Рассмотрим случай, когда первый корень

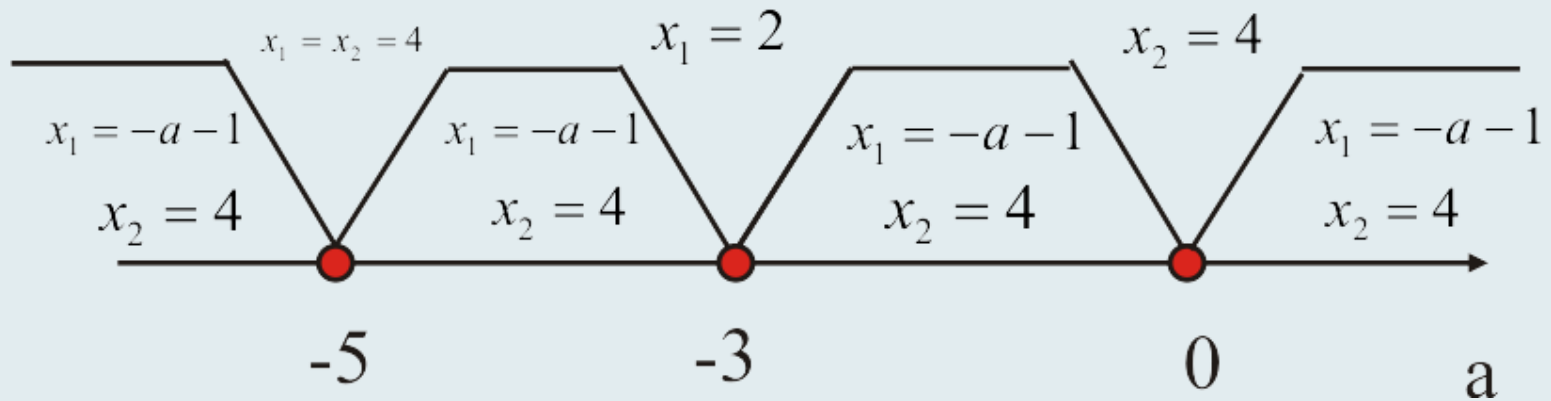
$x_1 = -a - 1$ равен -1 , тогда $x_1 = -a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$

При этом же значении параметра ($a = 0$)

второй корень $x_2 = 4$



Окончательная диаграмма решений



Самостоятельно:

1. Решить уравнение

$$\frac{x^2}{x-2a} + \frac{2ax - (a-1)(a+2)}{2a-x} + 1 = 0$$

2. Решить уравнение $\frac{2x-1}{x-a} + \frac{2x}{a} = \frac{ax-2}{a^2-ax}$

3. Решить уравнение

$$x^2 - bx - 2b^2 = 0$$

$$x^2 + 5bx - 6b^2 = 0$$

$$x^2 + 4bx + 3b^2 - 4b - 4 = 0$$

4. Решить уравнение $(2a - 1)x^2 - (3a + 1)x + a - 1 = 0$

5. Решить уравнение

$$\frac{2x}{2x + a} + \frac{x}{2x - a} = \frac{a^2}{4x^2 - a^2}$$

6. Решить уравнение

$$\frac{3x^2 - 2}{a^2 + 3a} + \frac{x - 1}{a + 3} + \frac{2}{a} = 0$$